D19

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel und H. Hasse

Band 173

Heft 4

Ausgegeben den 16. September 1935

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 35 und Leipzig

1935

Band 173. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Witt, Ernst, Zwei Regeln über verschränkte Produkte	191
Rédei, L., Über die Pellsche Gleichung $t^2-du^2=-1$	193
Weiss, E. A., Zur Theorie des syzygetischen Büschels von Kurven 3. Ordnung	222
Weiss, E. A., Die Autopolokoniken der singulären Kurven 3. Ordnung	233
Garver, Raymond, A note on Bieberbach's trisection method	243
Franz, Wolfgang, Über die Torsion einer Überdeckung	245

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 75 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10
Printed in Germany

Zwei Regeln über verschränkte Produkte.

Von *Ernst Witt* in Göttingen.

Ist $\mathfrak{g}$ eine Klassensumme, bestehend aus g Elementen der galoisschen Gruppe von K/k, so ist mit $a_{\sigma,\tau}$ auch $a_{\sigma,\tau}^{\mathfrak{g}}$ ein Faktorensystem. Das folgt unmittelbar aus der Assoziativregel

$$a_{\sigma,\tau}^{\varrho}\, a_{\varrho,\sigma\tau} = a_{\varrho,\sigma}\, a_{\varrho\sigma,\tau}\,. \tag{1}$$

Zu untersuchen ist, wie sich das verschränkte Produkt $(a_{\sigma,\tau}^{\mathfrak{g}}, K)$ durch $(a_{\sigma,\tau}, K)$ ausdrücken läßt.

Ist $\mathfrak{g}$ ein Normalteiler der galoisschen Gruppe und $\bar{k}$ der zugehörige Zwischenkörper, so wird die Algebra $(a_{\sigma,\tau}, K)^g$ schon von $\bar{k}$ zerfällt, muß also einer Algebra $(b_{\bar{\sigma},\bar{\tau}}, \bar{k})$ ähnlich sein. Zu untersuchen ist, wie man das Faktorensystem $b_{\bar{\sigma},\bar{\tau}}$ aus den Größen $a_{\sigma,\tau}$ gewinnen kann. Im Ergebnis ist ein Satz von Chevalley [1]) enthalten, der leider im Bericht von Deuring [2]) unerwähnt blieb.

Wir verwenden die abkürzende Schreibweise $a_{\sigma,\tau}^{\mathfrak{g}} = \prod_{\nu \text{ aus } \mathfrak{g}} a_{\sigma,\tau}^{\nu}$, $a_{\mathfrak{g}\sigma,\tau} = \prod_{\nu \text{ aus } \mathfrak{g}} a_{\nu\sigma,\tau}$, usw. Wird in (1) ϱ, σ, τ erstens durch σ, τ, ν, zweitens durch σ, ν, τ, und drittens durch ν, σ, τ ersetzt, und hernach über alle ν aus $\mathfrak{g}$ multipliziert, so entstehen die drei Gleichungen

$$\begin{cases} a_{\tau,\mathfrak{g}}^{\sigma}\, a_{\sigma,\tau\mathfrak{g}} = a_{\sigma,\tau}^{g}\, a_{\sigma\tau,\mathfrak{g}} \\ a_{\mathfrak{g},\tau}^{\sigma}\, a_{\sigma,\mathfrak{g}\tau} = a_{\sigma,\mathfrak{g}}\, a_{\sigma\mathfrak{g},\tau} \\ a_{\sigma,\tau}^{\mathfrak{g}}\, a_{\mathfrak{g},\sigma\tau} = a_{\mathfrak{g},\sigma}\, a_{\mathfrak{g}\sigma,\tau}\,. \end{cases} \tag{2}$$

Da $\mathfrak{g}$ Klassensumme ist, gilt $a_{\sigma,\tau\mathfrak{g}} = a_{\sigma,\mathfrak{g}\tau}$ usf. Wird dies beachtet, so können die Gleichungen (2) folgendermaßen zusammengefaßt werden:

$$a_{\sigma,\tau}^{g} \cdot \left[\frac{a_{\sigma\tau,\mathfrak{g}}}{a_{\sigma,\mathfrak{g}}\, a_{\tau,\mathfrak{g}}^{\sigma}}\right] = \frac{a_{\sigma,\tau\mathfrak{g}}}{a_{\sigma,\mathfrak{g}}} = \frac{a_{\sigma\mathfrak{g},\tau}}{a_{\mathfrak{g},\tau}^{\sigma}} = a_{\sigma,\tau}^{\mathfrak{g}} \cdot \left[\frac{a_{\mathfrak{g},\sigma\tau}}{a_{\mathfrak{g},\sigma}\, a_{\mathfrak{g},\tau}^{\sigma}}\right]. \tag{3}$$

In Klammern stehen dabei Transformationsgrößen von der Gestalt $\frac{d_\sigma d_\tau^\sigma}{d_{\sigma\tau}}$. Nach bekannten Regeln über verschränkte Produkte [2]) folgt nun der

Satz: *Ist $\mathfrak{g}$ eine Klassensumme von g Elementen der galoisschen Gruppe von K/k, so gilt*

$$(a_{\sigma,\tau}^{\mathfrak{g}}, K) \sim (a_{\sigma,\tau}, K)^g\,. \tag{4}$$

Nun sei $\mathfrak{g}$ sogar Normalteiler. Wir wollen nach vorgenommener Vertreterwahl mod $\mathfrak{g}$ den Vertreter der Nebengruppe $\sigma\mathfrak{g}$ kurz mit $\bar{\sigma}$ bezeichnen.

---

[1]) C. Chevalley, La théorie du symbole de restes normiques. Crelle **169** (1933), S. 147.

[2]) M. Deuring, Algebren. Ergebnisse der Math. **4** (1935), S. 52.

Bilden wir $b_{\sigma,\tau} = a_{\sigma,\tau}^{g} \cdot \left[\frac{a_{\sigma\tau,\mathfrak{g}}}{a_{\sigma,\mathfrak{g}} a_{\tau,\mathfrak{g}}^{\sigma}}\right] \cdot \left[\frac{a_{\mathfrak{g},\bar{\sigma}} a_{\mathfrak{g},\bar{\tau}}^{\sigma}}{a_{\mathfrak{g},\overline{\sigma\tau}}}\right]$, so ist ebenfalls

$$(a_{\sigma,\tau}, K)^{g} \sim (b_{\sigma,\tau}, K)\,. \tag{5}$$

Aus (3) folgt weiter (die Striche deuten Kürzungen an)

$$b_{\sigma,\tau} = \frac{a_{\sigma,\tau\mathfrak{g}}}{a_{\sigma,\mathfrak{g}}} \cdot \frac{a_{\mathfrak{g},\bar{\sigma}} a_{\mathfrak{g},\bar{\tau}}^{\sigma}}{a_{\mathfrak{g},\overline{\sigma\tau}}} = b_{\sigma,\bar{\tau}}$$

$$b_{\sigma,\bar{\tau}} = \frac{a_{\sigma\mathfrak{g},\bar{\tau}}}{a_{\mathfrak{g},\bar{\tau}}^{\sigma}} \cdot \frac{a_{\mathfrak{g},\bar{\sigma}} a_{\mathfrak{g},\bar{\tau}}^{\sigma}}{a_{\mathfrak{g},\overline{\sigma\tau}}} = b_{\bar{\sigma},\bar{\tau}}$$

$$b_{\bar{\sigma},\bar{\tau}} = a_{\bar{\sigma},\bar{\tau}}^{\mathfrak{g}} \frac{a_{\mathfrak{g},\bar{\sigma}\bar{\tau}}}{a_{\mathfrak{g},\bar{\sigma}} a_{\mathfrak{g},\bar{\tau}}^{\bar{\sigma}}} \cdot \frac{a_{\mathfrak{g},\bar{\sigma}} a_{\mathfrak{g},\bar{\tau}}^{\bar{\sigma}}}{a_{\mathfrak{g},\overline{\sigma\tau}}}, \quad \text{also}$$

$$b_{\sigma,\tau} = b_{\bar{\sigma},\bar{\tau}} = a_{\bar{\sigma},\bar{\tau}}^{\mathfrak{g}} \frac{a_{\mathfrak{g},\bar{\sigma}\bar{\tau}}}{a_{\mathfrak{g},\overline{\sigma\tau}}}\,. \tag{6}$$

Nach einer anderen Regel über verschränkte Produkte [2]) liefern die Gleichungen (5) und (6) zusammen den

Satz: *Ist* $\mathfrak{g}$ *ein Normalteiler der Ordnung* g *in der galoisschen Gruppe* $\mathfrak{G}$ *von* K/k *und* $\bar{k}$ *der zugehörige Zwischenkörper, so gilt in unserer Bezeichnung*

$$(a_{\sigma,\tau}, K)^{g} \sim \left(a_{\bar{\sigma},\bar{\tau}}^{\mathfrak{g}} \frac{a_{\mathfrak{g},\bar{\sigma}\bar{\tau}}}{a_{\mathfrak{g},\overline{\sigma\tau}}}, \bar{k}\right). \tag{7}$$

„Zerfall" von $\mathfrak{G}/\mathfrak{g}$ bedeutet: Die Vertreter können so gewählt werden, daß sie eine Gruppe bilden. In diesem Fall fällt der Zusatzfaktor fort:

$$(a_{\sigma,\tau}, K)^{g} \sim (a_{\bar{\sigma},\bar{\tau}}^{\mathfrak{g}}, \bar{k})\,. \tag{8}$$

Dieser Umstand trifft jedenfalls zu, wenn $\mathfrak{g}$ ein direkter Faktor von $\mathfrak{G}$ ist; damit ist auch das Lemma von Chevalley erneut bewiesen.

Göttingen, den 16. März 1935.

Eingegangen 28. März 1935.

Über die Pellsche Gleichung $t^2 - du^2 = -1$.

Von *L. Rédei* in Göttingen.

In der Pellschen Gleichung

$$t^2 - du^2 = \pm 1 \tag{1}$$

sei d eine ganze rationale Zahl. Besteht diese Gleichung für ganze rationale Werte $t, u\,(\neq 0)$, so nennen wir das Zahlenpaar t, u eine Lösung von (1) und diese Gleichung selbst lösbar [1]). Nur diejenigen d sind von Interesse, die positiv und keine Quadratzahlen sind; deshalb beschränken wir uns nachher auf solche d. Fundamentallösung von (1) heißt die Lösung $t = T$, $u = U$, in der $T, U > 0$ und T (d. h. auch U) möglichst klein ist. Bekanntlich hat (1) immer unendlich viele Lösungen, die alle durch die Formel

$$t + u\sqrt{d} = (T + U\sqrt{d})^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

als $\pm t$, $\pm u$ geliefert werden.

Ist auf der rechten Seite von (1) nur der Wert -1 zugelassen, so ist die Frage der Lösbarkeit der entsprechenden Gleichung

$$t^2 - du^2 = -1 \tag{3}$$

im allgemeinen unerledigt. Bevor ich näher darauf eingehe, verweise ich auf den engen Zusammenhang zwischen der Gleichung (1) und dem quadratischen Körper $R(\sqrt{d})$, wo R der Körper der rationalen Zahlen ist. In diesem Zusammenhange spielt die Gleichung (3) eine wichtige Rolle, da die Existenz einer Einheit mit der Norm -1 im Körper $R(\sqrt{d})$ bzw. in einem entsprechenden Ring des Körpers von der Lösbarkeit dieser Gleichung abhängt.

Wenn auch das wohlbekannte Kriterium besteht, daß die Gleichung (3) lösbar oder unlösbar ist, je nachdem die Anzahl der Glieder einer Periode in der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ ungerade oder gerade ist, so bedeutet dieser Satz in der Praxis doch kaum mehr als ein Aufschieben des Problems, da die hierzu erforderliche Kettenbruchentwicklung große rechnerische Schwierigkeiten bietet.

In den letzten Jahren wurden mehrere Sätze aufgestellt [2]), die für quadratfreie d die Frage der Lösbarkeit von (3) durch Kongruenzbedingungen (mit Hilfe von zweiten

[1]) Oft nimmt man die Pellsche Gleichung in der Form an, daß auf der rechten Seite ± 4 steht. Bekanntlich läßt sich die Behandlung beider Gleichungen aufeinander zurückführen, und insbesondere ist die Frage der Lösbarkeit für beide Gleichungen identisch.

[2]) Bezüglich dieser Sätze und der weiteren Literatur verweise ich auf meine Arbeit: Über die Grundeinheit und die durch 8 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper, dieses Journal **171** (1934), S. 131—148. Diese Arbeit wird im folgenden mit R. 1 zitiert. Insbesondere hat der Satz von § 3 seinen Ursprung in Dirichlets Untersuchungen, was auch bei dem Vergleich mit der eben erwähnten Arbeit hervorgeht.

und vierten Potenzrestsymbolen) unmittelbar auf Grund der Primfaktoren von d in der Mehrzahl der Fälle entscheiden lassen [3]).

In dieser Arbeit beschäftige ich mich mit dem allgemeinen Falle, in dem also d auch mehrfache Primfaktoren enthalten kann, und erhalte Sätze, die unmittelbare Verallgemeinerungen der oben erwähnten Sätze sind. Dazu hatte ich schon in der Arbeit R. 1 alle Mittel beisammen, doch hat meine Aufmerksamkeit auf diese allgemeine Frage erst eine inzwischen erschienene Arbeit von P. Epstein [4]) gelenkt.

Im einzelnen ist Inhalt und Einteilung der Arbeit wie folgt. Im § 1 zeige ich, daß die Frage der Lösbarkeit von (3) sich auf die Fälle $d = m$ oder $d = mq^2$ reduzieren läßt, wobei m eine quadratfreie ganze Zahl, q eine Primzahl und $(q, m) = 1$ ist. Aus verschiedenen Gründen, die teils von selbst klar werden, teils später erklärt werden, beschränke ich mich aber nachher nicht auf diese beiden Fälle. Somit dient § 1 nur zur allgemeinen Orientierung in der Frage, ohne später in Anwendung zu kommen. Im § 2 beweise ich die Sätze von Epstein [5]) wesentlich einfacher (ohne die Kettenbrüche zu Hilfe zu nehmen) und in einer schärferen Fassung. Ein Teil der Epsteinschen Resultate lautet: So oft nur die Gleichung (3) lösbar ist, läßt sich aus allen Darstellungen $d = A^2 + B^2$ (A, B positiv ganz, $(A, B) = 1$) eine einzige auszeichnen, die unter allen die Eigenschaft hat, daß A in der Hauptform $x^2 - dy^2$ mit ganzen rationalen relativ primen Zahlen x, y darstellbar ist, woraus auch folgt, daß A ein quadratischer Rest mod d ist. Diese Ergebnisse habe ich für quadratfreie d schon in der Arbeit R. 1 angeführt (s. dort Fußnote [37])), und aus dem Restcharakter von A habe ich weitere Folgerungen gezogen. Hier werde ich im § 4 ähnlich schließen. Dazu kommt also aus dem § 2 nur die Aussage „A ist ein quadratischer Rest mod d" in Anwendung, wobei gleichgültig bleibt, aus welcher Darstellung $d = A^2 + B^2$ diese Zahl A genommen ist. Diese Teilaussage läßt sich genau so beweisen wie in der Arbeit R. 1, S. 144—147. Noch kürzer läßt sich der Beweis als ein Teil des § 2 zusammenstellen. Epstein nannte das oben erwähnte Zahlenpaar A, B (bzw. die Darstellung $d = A^2 + B^2$ selbst) die Hauptdarstellung von d, ich nenne dieses Zahlenpaar wegen des Zusammenhanges mit (3) die Pellsche Basis von d. Darüber hinaus enthält der § 2 einige kleinere Feststellungen. Den Hauptgegenstand dieser Arbeit bilden die in den §§ 3 und 4 enthaltenen Sätze; diese meinte ich im vorigen Absatz, ich verweise des näheren auf die betreffenden Stellen der Arbeit. In der vorliegenden Arbeit werden die erwähnten früheren Sätze über ein quadratfreies d ohne besondere Mühe mitbewiesen, und dieser Beweis ist etwas einfacher als der frühere. Die aus den §§ 3, 4 entspringenden, sich auf die Lösbarkeit von (3) beziehenden, teils hinreichenden, teils notwendigen Bedingungen werde ich im § 5 in einer endgültigen Form zusammenstellen. Im § 6 behandle ich ein Beispiel von Epstein [6]) einfacher als er. Als Anwendung des Begriffs der Pellschen Basis betrachte ich im § 7 solche quadratische Funktionen $ax^2 + bx + c$, die für $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ausschließlich Zahlen d darstellen, für die die Gleichung (3) lösbar ist.

Durchweg sei folgendes festgelegt:

Primzahl bedeutet eine positive rationale Primzahl. Mit $p, p_k, p'_k, \ldots$ werden stets Primzahlen $\not\equiv 3 \pmod 4$ bezeichnet.

---

[3]) Die Häufigkeit der Anwendbarkeit dieser Sätze untersuche ich in einer demnächst in diesem Journal erscheinenden Arbeit: Über einige Mittelwertfragen im quadratischen Zahlkörper. Diese Arbeit wird im folgenden mit R. 2 zitiert.

[4]) P. Epstein, Zur Auflösbarkeit der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$, dieses Journ. **171** (1934), S. 243—252.

[5]) A. a. O. [4]), S. 243—248.

[6]) A. a. O. [4]), S. 248—252.

Das Zeichen $a^e \,||\, b$ sei durch $a^e \mid b$, $a^{e+1} \nmid b$ erklärt.

Ist (3) lösbar, so nenne ich wie Epstein d zulässig. Dann ist -1 ein quadratischer Rest mod d, d. h. d ist ein Produkt aus einigen gleichen oder verschiedenen p und $4 \nmid d$. Im folgenden beschränken wir uns also auf solche d. Bekanntlich sind dies die sämtlichen Zahlen $A^2 + B^2$, wobei A, B $(\neq 0)$ ganz und rational sind und $(A, B) = 1$ ist.

Sind α, β ganze Zahlen aus $R(i)$ $(i^2 = -1)$, so bezeichne ich das vierte Potenzrestsymbol [7]) $\left(\frac{\alpha \mid R(i)}{\beta}\right)_4$ mit $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{i4}$. Der Bequemlichkeit halber erweitere ich die Definition auch auf den Fall $\beta = 1 + i$, α ganz und rational, $\alpha \equiv 1 \pmod 4$, und zwar sei dann $\left(\frac{\alpha}{1+i}\right)_{i4} = i^{\frac{\alpha-1}{4}}$. Dabei soll auch $\left(\frac{\alpha}{\beta\gamma}\right)_{i4} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{i4}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)_{i4}$ gelten, wenn die Faktoren auf der rechten Seite einen Sinn haben.

N bezeichne die Norm im Körper $R(i)$. Ist α ganz rational und β ein Produkt aus lauter Primidealen ersten Grades in $R(i)$, gilt ferner $\left(\frac{\alpha}{p}\right) = 1$ für $p \mid N\beta$, so sei $\left(\frac{\alpha}{N\beta}\right)_4 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{i4}$. — Das Symbol $\left(\frac{x}{y}\right)_4$ ist also für solche ganzen rationalen Zahlen x, y erklärt, für die folgendes erfüllt ist: y ist ein Produkt aus einigen p; für jedes dieser p ist x ein quadratischer Rest; für $2 \mid y$ ist $x \equiv 1 \pmod 4$. — Da $\left(\frac{x}{2}\right)_4 = i^{\frac{x-1}{4}}$, ist $\left(\frac{x}{y}\right)_4$ für $2 \mid y$ nicht immer rational. In den Fällen $2 \nmid y$ und $2 \mid y$, $x \equiv 1 \pmod 8$ hat $\left(\frac{x}{y}\right)_4$ $(= \pm 1)$ die übliche Bedeutung des „rationalen" vierten Potenzrestsymbols; insbesondere ist dann und nur dann $\left(\frac{x}{p}\right)_4 = 1$, wenn x ein vierter Potenzrest in R mod p bzw. mod 2^4 ist, letzteres im Falle $p = 2$ (dann ist also $x \equiv 1 \pmod{16}$).

Sind a, b ganze rationale Zahlen und hat das Kroneckersche Symbol $\left(\frac{a}{x}\right)$ für jeden Primzahlfaktor x von b den Wert 1, so soll das Symbol $\left(\left(\frac{a}{b}\right)\right)$ den Wert 1 haben. Ähnlich soll $\left(\left(\frac{a}{b}\right)\right) = -1$ das Bestehen aller Gleichungen $\left(\frac{a}{x}\right) = -1$ bedeuten, mit denselben x wie vorher. Sonst soll $\left(\left(\frac{a}{b}\right)\right)$ keinen Sinn haben, doch werden wir z. B. die Abkürzung $\left(\left(\frac{a}{b}\right)\right) \neq -1$ benutzen, die natürlich das Nichtbestehen von $\left(\left(\frac{a}{b}\right)\right) = -1$ bedeutet.

§ 1.

Ich beweise die folgenden Sätze:

Satz 1. *Ist $p \mid d$, $p \neq 2$, so sind d und dp^2 (d. h. auch $dp^4, dp^6, \ldots$) gleichzeitig zulässig oder nicht zulässig.*

Satz 2. *Ist m (> 1) ganz und rational, so ist dm^2 dann und nur dann zulässig, wenn alle dp^2 $(p \mid m)$ zulässig sind.*

---

[7]) H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil II, Jahresb. d. D. M.-V. Ergänzungsband **VI** (1930), S. 49—50.

Ist nämlich dp^2 zulässig, so ist offenbar auch d von dieser Art. Ist umgekehrt d zulässig und ist T, U die Fundamentallösung von (3), so liefert die Formel (2) für $n = p$ eine solche Lösung t, u, für die $u = pT^{p-1}U + dg$ ist mit ganzem rationalem g. Im Falle $p \mid d$ ist also $p \mid u$, was offenbar bedeutet, daß auch dp^2 zulässig ist, womit Satz 1 bewiesen ist.

Ist dm^2 zulässig (m ganz rational), so ist offenbar auch jedes dp^2 ($p \mid m$) zulässig. Es seien umgekehrt $p_1, p_2, \ldots, p_k$ die verschiedenen Primzahlfaktoren von m und jedes dp_l^2 ($l = 1, 2, \ldots, k$) zulässig. Ferner sei t_l, u_l die Fundamentallösung der entsprechenden Gleichung

$$t_l^2 - dp_l^2 u_l^2 = -1.$$

Dann ist aber $t_l, p_l u_l$ eine Lösung von (3), woraus nach (2)

$$t_l + p_l u_l \sqrt{d} = (T + U\sqrt{d})^{a_l}$$

folgt, wo T, U wieder die Fundamentallösung von (3) bedeutet und a_l eine positive ungerade Zahl ist. Für $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ liefert (2) eine Lösung von (3), für die aber offenbar $p_1 p_2 \cdots p_k \mid u$ gilt, woraus die Zulässigkeit von $d(p_1 p_2 \cdots p_k)^2$ folgt. Mit Hilfe von Satz 1 folgt hieraus Satz 2.

§ 2.

Im nachstehenden Satz, den ich jetzt beweisen werde, sind die Teile 1, 2, 3 und 6 die Sätze von Epstein; Teil 3 rührt teilweise von mir her, wie in der Einleitung schon erwähnt.

Satz 3. 1. *Besteht die Gleichung*

$$(x^2 - y^2)A - 2xyB = 1 \tag{4}$$

in ganzen rationalen Zahlen x, y, A, B ($B \neq 0$), *so ist*

$$d = A^2 + B^2 \tag{5}$$

zulässig und

$$t = (x^2 - y^2)B + 2xyA, \tag{6}$$

$$u = \pm (x^2 + y^2) \tag{7}$$

liefern eine Lösung von (3).

2. *Auf dem in* 1. *angegebenen Wege entsteht jedes zulässige* d *und jede Lösung von* (3).

3. *Durch* d *sind die Zahlen* $|A|$, $|B|$ *samt der Reihenfolge aus* (4), (5) *bestimmt; ich nenne sie die Pellsche Basis von* d, *wobei diese Definition sich natürlich nur auf die zulässigen* d *bezieht. Immer ist* $2 \nmid A$, $(A, B) = 1$, *und* A, $-A$, $2B$, $-2B$ *sind in der Form* $X^2 - dY^2$ *mit ganzen rationalen Zahlen* X, Y ($(X, Y) = 1$) *darstellbar, und zwar gilt* (*mit der Bezeichnung von* 1.):

$$A = (Ax - By)^2 - dy^2, \quad -A = (Ay + Bx)^2 - dx^2, \tag{8}$$

$$2B = (A(x + y) + B(x - y))^2 - d(x + y)^2, \tag{9}$$

$$-2B = (A(x - y) - B(x + y))^2 - d(x - y)^2.$$

Insbesondere ist mit geeignetem Vorzeichen $\pm |A|$ *ein quadratischer Rest* mod $4d$.

4. *Die durch die Pellsche Basis* $|A|$, $|B|$ *gelieferten Faktoren* $A + Bi$, $A - Bi$ *von* $d = (A + Bi)(A - Bi)$ *sind in einer geeigneten Reihenfolge Teiler von* $t + i$ *und* $t - i$, *wobei* t (*zusammen mit* u) *eine beliebige Lösung von* (3) *ist. Bei gegebenen* d *und* t *läßt sich also die Pellsche Basis* $|A|$, $|B|$ *bis auf die Reihenfolge der Glieder* $|A|$, $|B|$ *einfach aus der Gleichung*

(10) $$(A + Bi) = (d, t + i)$$

bestimmen, wobei beide Seiten der Gleichung als Ideale zu betrachten sind; wenn noch die letzte Bemerkung in 3. berücksichtigt wird, so ist auch die Reihenfolge der Zahlen $|A|$, $|B|$ schon durch (10) bestimmt, ausgenommen den Fall, in dem $2 \mid d$ und d ein Produkt aus lauter Primzahlen $\equiv 1 \pmod 8$ ist. Wenn insbesondere $d = d_0 e^2$, d. h. auch d_0 zulässig ist (d_0, e ganz rational), so läßt sich die Pellsche Basis $|A_0|$, $|B_0|$ von d_0 aus der Pellschen Basis $|A|$, $|B|$ von d und aus d_0 durch die Gleichung

(11) $$(A_0 + B_0 i) = (d_0, A + Bi)$$

bestimmen, wobei wieder höchstens die Reihenfolge von $|A_0|$, $|B_0|$ unaufgeklärt bleibt.

5. *Es sei ein zulässiges d fest gewählt und $|A|$, $|B|$ sei seine Pellsche Basis. Die Gleichungen (4), (5) sind auch dann erfüllbar, wenn A, B durch $|A|$, $|B|$ ersetzt werden. Unter den entsprechenden x, y gibt es ein einziges Paar x_0, y_0, in dem $x_0 > 0$ und $x_0^2 + y_0^2$ möglichst klein wird. Setzt man dann für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$*

(12) $$f_n(v, w, z) = \sum_{2 \mid k} \binom{n}{k} v^{n-k} w^k z^{\frac{k}{2}},$$

(13) $$g_n(v, w, z) = \sum_{2 \nmid k} \binom{n}{k} v^{n-k} w^k z^{\frac{k-1}{2}},$$

wobei k die geraden bzw. ungeraden Werte von $0, 1, 2, \ldots, n$ durchläuft, wählt ferner die Werte

(14) $$v = (x_0^2 - y_0^2)\,|B| + 2x_0 y_0\,|A|,$$

(15) $$w = x_0^2 + y_0^2,$$

(16) $$z = A^2 + B^2 (= d)$$

und bezeichnet die so entstandenen Zahlen kurz mit f_n und g_n, so gilt folgendes:

Alle Zahlenpaare x, y, die durch (4), (5) mit beliebigen A, B (wofür nach 3. nur $A = \pm |A|$, $B = \pm |B|$ in Betracht kommen) d darstellen, sind

(17) $$x_n = x_0 f_n + (x_0 |B| + y_0 |A|)\, g_n,$$

(18) $$y_n = y_0 f_n + (x_0 |A| - y_0 |B|)\, g_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die daraus durch Abänderung der Reihenfolge und des Vorzeichens der Glieder entstehenden Zahlenpaare.

Bedeutet weiter $(x, y)^a$ das Paar x, y oder y, x, je nachdem $a = 0$ oder 1 ist, und $\pm (x, y)^a$ die Paare $(x, y)^a$ und $(-x, -y)^a$, so gilt des näheren noch folgendes:

Die Gleichungen (4), (5), (6) werden durch

(19) $$(x, y) = \pm (x_n, (-1)^b y_n)^a,$$

(20) $$A = (-1)^{n+a} |A|, \qquad B = (-1)^{n+b} |B|,$$

(21) $$t = \sigma(-1)^{n+a+b} t_{2n+1}$$

erfüllt ($a = 0, 1$; $b = 0, 1$; $n = 0, 1, 2, \ldots$), wobei $\sigma = -1$ ist für $y_0 < 0$, sonst $\sigma = 1$, und t_n (zusammen mit u_n) die durch die Formel (2) aus der Fundamentallösung T, U dargestellte n-te positive Lösung von (1) bedeutet. (Ähnlich kann man t_{2n+1}, u_{2n+1} die $(n + 1)$-te positive Lösung von (3) nennen. In dieser Terminologie ist $t_1 = T$, $u_1 = U$ die erste positive Lösung von (1) und auch von (3), die also zugleich die Fundamentallösung ist.)

6. *Besteht die Gleichung (4), so ist sie auch noch nach Ersetzung von A, B durch $A + 2xym$, $B + (x^2 - y^2)\, m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) richtig. Dementsprechend ist jedes Zahlenpaar*

$$|A + 2xym|, \quad |B + (x^2 - y^2)m|$$

auch eine Pellsche Basis (sie gehört zur Zahl

$$d_1 = (A + 2xym)^2 + (B + (x^2 - y^2)m)^2 = d + 2tm + u^2m^2,$$

die also auch zulässig ist, wobei d, t, u *durch* (5), (6), (7) *bestimmt sind), ausgenommen den Fall* $B + (x^2 - y^2)\, m = 0$, *der nur für* $A = \pm 1$, $|x| + |y| = 1$, $m = \pm B$ *eintritt, wobei das Vorzeichen von* m *geeignet zu wählen ist. (In diesem einzigen Falle geht das obige Zahlenpaar in* $1, 0$ *über, und* d_1 *ist dann gleich* 1.)

Von diesem Satze ist 1., (8), (9) unmittelbar einzusehen. Auch zu 6. brauchen wir nur zu bemerken, daß die dortige zweite Form $d + 2tm + u^2m^2$ von d_1 auf Grund von (5), (6), (7) leicht berechenbar ist. Dann ist noch zu prüfen, wann $B + (x^2 - y^2)\, m = 0$ ist. In diesem Falle ist $x^2 - y^2 \mid B$, woraus wegen (4) $x^2 - y^2 = \pm 1$ folgt. Entweder ist also $x = 0$, $y = \pm 1$ oder $x = \pm 1$, $y = 0$, jedenfalls also $xy = 0$, woraus nach (4) $A = \pm 1$ folgt. Daraus ist die Richtigkeit von 6. einzusehen. Natürlich bleibt dabei die Eindeutigkeitsfrage der Pellschen Basis noch offen, die wir später behandeln.

Zum Beweis von 2. nehme ich an, daß d zulässig ist und t, u eine Lösung von (3) bedeutet. Ich betrachte die Ideale in $R(i)$:

$$\delta = (d, t + i), \tag{22}$$

$$\alpha = (u, t + i). \tag{23}$$

Aus (3) folgt

$$t^2 + 1 = du^2 \tag{24}$$

und hieraus weiter

$$N\delta = (d, t + i)\,(d, t - i) = (d^2, d(t + i), d(t - i), du^2) = d(d, 2i, t - i, u^2) = d, \tag{25}$$

da $2 \nmid u$. Ähnlich ist

$$N\alpha = u(u, 2i, t - i, du) = |u|. \tag{26}$$

Daraus folgt also

$$N\delta\alpha^2 = du^2 = N(t + i). \tag{27}$$

Allgemein gilt nun folgendes: Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ ganze Ideale in einem algebraischen Zahlkörper k, ist jeder Primidealfaktor von $\mathfrak{a}$ ein Teiler von $\mathfrak{a}_1$, gehen die verschiedenen Primidealfaktoren von $\mathfrak{a}_1$ in lauter verschiedenen rationalen Primzahlen auf, und sind endlich die Normen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$ einander gleich, so ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$. All dies trifft für $\mathfrak{a} = \delta\alpha^2$, $\mathfrak{a}_1 = t + i$, $k = R(i)$ wegen (22), (23), (27) zu, woraus

$$\delta\alpha^2 = (t + i)$$

folgt. Setzen wir also mit ganzen rationalen Zahlen x, y, A, B

$$\alpha = (x - yi), \tag{28}$$

$$\delta = (B + Ai), \tag{29}$$

so ist

$$(x - yi)^2\,(B + Ai) = (t + i).$$

Die Zahlen A, B in (29) lassen sich so wählen, daß die letzte Gleichung in die richtige (Zahlen-)Gleichung

$$(x - yi)^2\,(B + Ai) = t + i \tag{30}$$

übergeht. Nun folgen aus dieser Gleichung offenbar die Gleichungen (4) und (6). Auch (5) folgt aus (22), (29). Dabei ist $B \neq 0$, wie es gefordert war, da im Falle $B = 0$ wegen (4)

$A = \pm 1$, d. h. wegen (5) $d = 1$ folgen würde, was unmöglich ist. Endlich folgt (7) aus (3) — (6), womit (2) bewiesen ist.

Es bleibt noch übrig, die Eindeutigkeitsaussage in 3., sowie 4. und 5. zu beweisen. Dazu brauchen wir einige Vorbereitungen:

a. *Gelten* (4)—(6) *außer für* x, y, d, A, B, t *auch für* x, y, d, A_1, B_1, t_1, *so ist* $A_1 = A, B_1 = B, t_1 = t$, *ausgenommen den Fall* $d = 1 + B^2$, $|x| + |y| = 1, A = \pm 1$, $t = \pm B$; *auch dann ist aber* $A_1 = A, B_1 = eB, t_1 = et$, *wobei* $e = \pm 1$ *ist.*

Aus den Voraussetzungen folgt nämlich nach (4) offenbar

$$A_1 = A + 2xym, \quad B_1 = B + (x^2 - y^2)m,$$

wobei m eine ganze rationale Zahl ist; weiter folgt aus der Gleichung (5), die auch für A_1, B_1, d bestehen soll, $A_1^2 + B_1^2 = A^2 + B^2$. Hieraus erhalten wir leicht

$$0 = 2m((x^2 - y^2)\,B + 2xyA) + m^2(x^2 + y^2)^2.$$

Ist hier $m \neq 0$, was sich offenbar annehmen läßt, da sonst $A_1 = A, B_1 = B, t_1 = t$ ist, so folgt nach (6), (7)

$$0 = 2t + mu^2,$$

wobei für t, u auch (3) gilt. Da $(2t, u) = 1$, ist $m = 2tn$, wobei n ganz rational ist. Es folgt also $0 = 1 + nu^2$, d. h. $n = -1$, $u = \pm 1$, d. h. $x^2 + y^2 = 1$. Dann ist $xy = 0$, $x^2 - y^2 = \pm 1$, und nach (4) $A = x^2 - y^2 = \pm 1$. Aus (5), (6) folgt dann $d = 1 + B^2$, $t = (x^2 - y^2)\,B$ und nach dem Vorigen

$$m = -2t, \quad B_1 = B - 2t\,(x^2 - y^2) = -B\,.$$

Endlich ist wegen der Gleichung (6), die auch für A_1, B_1, t_1 besteht, $t_1 = (x^2 - y^2)B_1 = -t$. Ebenso folgt $A_1 = A$ aus der Gleichung (4), die auch für A_1, B_1 gilt. Damit haben wir **a.** bewiesen.

b. *Die Gleichungen* (4)—(6) *gelten mit* x, y, d, A, B *auch für*

$$\pm\,(x, (-1)^b y)^a, d, (-1)^a A, (-1)^b B.$$

Zum Beweis genügt es zu bemerken, daß (4)—(6) richtig bleiben, wenn x, y, A, B, t durch $-x, -y, A, B, t$ oder $x, -y, A, -B, -t$ oder $y, x, -A, B, -t$ ersetzt werden.

c. *Bei festem* d *und* t *können die Gleichungen* (4)—(6) *höchstens für vier verschiedene Wertepaare* x, y *erfüllt sein.* (Dies ist im wesentlichen die Umkehrung von **b.**)

Wir nehmen zum Beweise an, daß bei festem d und t (4)—(6) mit x, y, A, B auch für x_1, y_1, A_1, B_1 bestehen. Aus (4) und (6) folgt (30), analog gilt also auch

$$(x_1 - y_1 i)^2\,(B_1 + A_1 i) = t + i. \tag{31}$$

Wegen Gleichung (5), die auch für A_1, B_1 richtig ist, gilt $N(B_1 + A_1 i) = N(B + Ai)$. Weiter sind $B + Ai, B_1 + A_1 i$ wegen (30), (31) Teiler von $t + i$, woraus (wie bei (27)) leicht folgt: $(B_1 + A_1 i) = (B + Ai)$. Aus (30), (31) erhalten wir also $(x_1 - y_1 i) = (x - yi)$, d. h. $x_1 - y_1 i = i^k(x - yi)$ $(k = 0, 1, 2, 3)$, woraus die Richtigkeit von **c.** folgt.

Nun sei t_n, u_n die durch (2) dargestellte n-te positive Lösung von (1), wobei also $t_1 = T, u_1 = U$ zugleich die Fundamentallösung von (1) ist. Dann ist mit der Bezeichnung von (12), (13):

$$t_n = f_n(t_1, u_1, d), \quad u_n = g_n(t_1, u_1, d) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{32}$$

Ich nehme an, daß d zulässig und im folgenden fest gewählt ist. Nach 2. gibt es Zahlenpaare x, y, die durch (4)—(6) $t = t_1$ darstellen. Davon wähle ich ein bestimmtes x, y. Nach **b.** gibt es unter den acht Zahlenpaaren $\pm\,(x, (-1)^b y)^a$ $(a, b = 0, 1)$ vier solche, die durch (4)—(6) t_1 darstellen, und auch vier solche, die $-t_1$ darstellen und nach **c.**

gibt es keine weiteren Darstellungen von $\pm t_1$. Wieder sind unter diesen acht Zahlenpaaren zwei solche, die sich durch geeignete Wahl von x, y als $\pm (x, y)$ schreiben lassen, für die in (4)—(6) $A, B > 0$ und $t = \sigma t_1$ ist, wo σ ein fester Wert ± 1 ist. Es ist $x \neq 0$, da für $x = 0$ wegen (4) $y = \pm 1$, $A = -1$ ist, während doch $A > 0$ angenommen wurde. Aus den betrachteten Zahlenpaaren $\pm (x, y)$ ist also das eine gleich x_0, y_0 mit $x_0 > 0$. Das so bestimmte Zahlenpaar x_0, y_0 ist gerade das am Anfang von 5. geforderte, da wegen (7) zugleich $x_0^2 + y_0^2 = u_1$ minimal ist.

Ich führe jetzt nach (12)—(18) die Zahlen x_n, y_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ein. Nach (17), (18) ist, da jetzt $A, B > 0$:

$$x_n - y_n i = (x_0 - y_0 i) f_n + (x_0 + y_0 i) g_n (B - Ai).$$

Daraus folgt wegen (5):

$$(x_n - y_n i)^2 (B + Ai) = (x_0 - y_0 i)^2 (B + Ai) f_n^2 + (x_0 + y_0 i)^2 (B - Ai) d g_n^2 + 2(x_0^2 + y_0^2) d f_n g_n.$$

Da x_0, y_0 in 1. die Zahlen $A, B, \sigma t_1$ darstellen, folgen die zu (30) und (7) analogen Gleichungen

$$(x_0 - y_0 i)^2 (B + Ai) = \sigma t_1 + i, \qquad x_0^2 + y_0^2 = u_1,$$

wovon wir die letzte schon erwähnt haben. Wir erhalten also

$$(x_n - y_n i)^2 (B + Ai) = (\sigma t_1 + i) f_n^2 + (\sigma t_1 - i) d g_n^2 + 2u_1 d f_n g_n.$$

Wir sehen, daß die Zahlen v, w, z in (14)—(16) gleich $\sigma t_1, u_1, d$ sind; somit entsteht bei dem Einsetzen in (12), (13) für f_n, g_n nach (32) gerade das Zahlenpaar $\sigma^n t_n, \sigma^{n-1} u_n$ (wobei $\sigma = \pm 1$ zu beachten ist). Es ist also

$$(x_n - y_n i)^2 (B + Ai) = \sigma t_1 (t_n^2 + d u_n^2) + 2\sigma u_1 d t_n u_n + (t_n^2 - d u_n^2) i.$$

Wegen (2) ist der reelle Teil auf der rechten Seite offenbar σt_{2n+1}, der imaginäre Teil $(-1)^n$, woraus

$$(x_n - y_n i)^2 ((-1)^n B + (-1)^n Ai) = \sigma (-1)^n t_{2n+1} + i$$

folgt. Durch Trennung von Real- und Imaginärteil sieht man, daß x_n, y_n durch (4)—(6) die Zahlen $(-1)^n A$, $(-1)^n B, \sigma (-1)^n t_{2n+1}$ darstellen. Dies haben wir für $n = 1, 2, 3, \ldots$ gewonnen, ähnliches ist aber auch für $n = 0$ richtig. Nach **b.** haben wir damit die Behauptung über (19)—(21) bewiesen. Somit stellen die Zahlenpaare (19) jedes $e t_{2n+1} (e = \pm 1; n = 0, 1, 2, \ldots)$, d. h. jedes t aus einer Lösung von (3) durch (4)—(6) viermal dar, nach **c.** kommt also für x, y kein anderes Wertepaar in Betracht. Da nach (20) alle diese Paare in (4)—(6) die Zahlen $\pm A$, $\pm B$ darstellen und nach **a.** dadurch keine weiteren Zahlen A, B (bei festem d) dargestellt werden, folgt auch die Eindeutigkeit von $|A|, |B|$. Damit sind 3. und 5. bewiesen. Nunmehr folgt leicht auch 4., zum Teil aus der Bemerkung, daß t in (3) im Falle $d = d_0 e^2$ auch für d_0 eine Lösung von (3) liefert. Damit ist der Satz 3 bewiesen.

Von diesem Satze heben wir nochmals die in 3. enthaltenen zwei schönen Eigenschaften der Pellschen Basis $|A|, |B|$ von d hervor: die eine ist, daß $\pm A$ ein quadratischer Rest mod $4d$ ist, die andere ist die Eindeutigkeit. Wie ich schon erwähnt habe, werden später diese Tatsachen zwei Anwendungen finden (§ 4 bzw. § 7). Davon wird die letztere, die sich auf die Eindeutigkeit der Pellschen Basis stützt, weniger Bedeutung haben, während in der anderen die Eindeutigkeit nicht benutzt wird. Doch beansprucht meines Erachtens die Pellsche Basis gerade der Eindeutigkeit wegen volles selbständiges Interesse, denn diese Eigenschaft bietet eine neue Möglichkeit, auf diesem Wege die

zulässigen d zu erforschen. Da ich hoffe, hierauf noch zurückzukommen, füge ich hier nur einige einfache Bemerkungen hinzu.

Ist d zulässig, so läßt sich eine Lösung von (3) folgendermaßen gewinnen. Man bestimmt zunächst aus den Darstellungen $d = A^2 + B^2$ (A, B positiv ganz, $(A, B) = 1, 2 \nmid A$) diejenigen, in denen $\pm A$ ein quadratischer Rest mod $4d$ ist. Von diesen Paaren A, B gibt es ein (und nur ein) solches, wofür (4) in x, y lösbar ist. Nach Lösung von (4) gewinnen wir eine Lösung von (3) aus (6), (7). Dieser Weg ist insofern vorteilhaft, als für die Lösung x, y von (4) mit minimaler Quadratsumme $x^2 + y^2$ wegen (7) $|x|, |y| \leqq \sqrt{n}$ gilt, wobei u (zusammen mit t) die Fundamentallösung von (3) ist. Dieses Verfahren kann im Falle $d = p$ besonders günstig sein, da es dann nur eine Darstellung $p = A^2 + B^2$ ($A, B > 0, 2 \nmid A$) gibt, wodurch die Pellsche Basis bekannt ist.

Bemerkenswert ist, daß die Gleichung (4) lösbar ist, wenn A, B ganz rational sind, $2 \nmid A$ und $A^2 + B^2$ eine Primzahl ist.

Nun gilt folgendes:

d. *Jedes Paar* $1, f$ (f *positiv ganz*) *und jedes Paar* $f, 2$ (f *positiv ganz,* $2 \nmid f$) *ist eine Pellsche Basis. Ist aber* $e(\geqq 3)$ *eine ganze rationale Zahl, so gibt es eine positive zu* e *prime ganze Zahl* f *so, daß weder* e, f *noch* f, e *eine Pellsche Basis ist.*

Für eine positive ganze Zahl f genügen nämlich $x = 1, y = 0, A = 1, B = f$ der Gleichung (4). Ist überdies $2 \nmid f$, so ist ähnliches für $x = \frac{f+1}{2}, y = \frac{f-1}{2}, A = f, B = 2$ richtig. In der Tat ist also A, B in beiden Fällen eine Pellsche Basis.

Beim Beweis der zweiten Hälfte der Behauptung unterscheide ich die folgenden drei Fälle:

1) Wenn $e(\geqq 4)$ gerade ist, so ist wegen der Identität

$$e^2 + \left(\frac{e^2}{2} - 1\right)^2 = 1 + \left(\frac{e^2}{2}\right)^2 (= d)$$

nach dem Obigen das Zahlenpaar $1, \frac{e^2}{2}$ die Pellsche Basis von d, die Zahlen $e, \frac{e^2}{2} - 1$ können also in keiner Reihenfolge eine Pellsche Basis bilden.

2) Wenn $e = e'^2$, wobei $e'(\geqq 3)$ eine ungerade ganze Zahl ist, so läßt sich mit der Identität

$$(e'^2)^2 + \left(\frac{(e'^3 + e'^2 + 2}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{e'^3 + e'^2 + 2e'}{2}\right)^2$$

ähnlich schließen.

3) Wenn $e(\geqq 3)$ ungerade und keine Quadratzahl ist, dann soll zunächst q eine Primzahl bedeuten, für die n in $q^n \| e$ ungerade ist. Nach Lagrange gibt es eine positive ganze Zahl a so, daß $a^2 + 1$ kein quadratischer Rest mod q ist. Es läßt sich a sogar so bestimmen, daß a durch die übrigen Primzahlteiler von e und durch 4 teilbar ist. Dann ist nach dem Reziprozitätsgesetz

$$\left(\frac{a^2+1}{e}\right) = \left(\frac{e}{a^2+1}\right) = \left(\frac{2e}{a^2+1}\right) = -1. \tag{33}$$

Nach der Identität

$$(a^2 + 1)\,((a + e)^2 + 1) = e^2 + (ae + a^2 + 1)^2\ (= d)$$

können $e, ae + a^2 + 1$ in keiner Reihenfolge eine Pellsche Basis bilden, denn dazu wäre nach dem Teil 3 des Satzes 3 nötig, daß wenigstens eine der Zahlen $e, 2e$ ein quadratischer

Rest mod $\frac{d}{2}$ ist, was aber wegen (33) und $(a^2+1)|d$ nicht der Fall ist. Dabei ist noch $(e, ae + a^2 + 1) = 1$, womit **d.** bewiesen ist.

Ich bemerke noch, daß die Zahlen d unter 1), 2) zulässig sind, während dies bei 3) nicht notwendig der Fall ist.

Wie wir gesehen haben, kommt jede ungerade positive Zahl als erstes Element in einer Pellschen Basis (nämlich in $f, 2$) vor. Ähnlich kommt jede positive ganze Zahl als zweites Element in einer solchen Basis (nämlich in $1, f$) vor. Weitere Beispiele sind die folgenden:

Ist f ungerade, mit geeignetem Vorzeichen also $f \equiv 1 \pmod 4$, so ist

$$|f|, \left|\frac{3f+1}{4}\right|$$

die Pellsche Basis von

$$d = f^2 + \left(\frac{3f+1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}(25f^2 + 6f + 1),$$

da $x = 1,\ y = -2,\ A = f,\ B = \frac{3f+1}{4}$ eine Lösung von (4) ist. Zugleich ist $t = \frac{1}{4}(25f + 3),\ u = 5$ eine Lösung von (3).

Ist $f (\neq 0, \pm 2, \pm 6)$ eine ganze rationale Zahl, so läßt sich das Vorzeichen von f so wählen, daß es eine ungerade Zahl $n (> 1)$ mit $n \mid f - 2$ gibt. Dann ist

$$\frac{1}{2n}|n^2 f - f + 2|, |f|$$

die Pellsche Basis von

$$d = \left(\frac{n^2 f - f + 2}{2n}\right)^2 + f^2 = \frac{1}{4n^2}(n^4 f^2 + 2n^2 f^2 + f^2 + 4n^2 f^2 - 4f + 4),$$

da $x = \frac{n+1}{2},\ y = \frac{n-1}{2},\ A = \frac{1}{2n}(n^2 f - f + 2),\ B = f$ eine Lösung von (4) ist. Zugleich ist $t = \frac{1}{4n}(n^4 f + 2n^2 f + f + 2n^2 - 2),\ u = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$ eine Lösung von (3).

§ 3.

Nunmehr behaupte ich:

Satz 4. *Ist d nicht zulässig und t, u die Fundamentallösung von* (1), *für die also*

$$t^2 - du^2 = 1 \tag{34}$$

erfüllt ist, so ist

$$\sqrt{t + u\sqrt{d}} = xP_2\sqrt{P_1} + yQ_2\sqrt{Q_1} \tag{35}$$

und

$$x^2 P_1 P_2^2 - y^2 Q_1 Q_2^2 = 1, \tag{36}$$

wobei x, y, P_1, P_2, Q_1, Q_2 positive ganze Zahlen, P_1, Q_1 quadratfrei sind und

$$(P_1P_2, Q_1Q_2) = 1,\quad P_1P_2, Q_1Q_2 > 1,\quad d = P_1P_2^2Q_1Q_2^2$$

ist. Alle diese Zahlen sind durch d eindeutig bestimmt. Darüber hinaus gilt noch:

$$\left(\left(\frac{Q_1}{P_1P_2}\right)\right) = \left(\left(\frac{P_1}{Q_1Q_2}\right)\right) = 1, \tag{37}$$

$$\left(\frac{Q_1}{P_1}\right)_4 = 1\,, \tag{38}$$

weiter ($2 \nmid x$ *und*)

$$\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)_4 = \varepsilon\left(\frac{-1}{x}\right), \tag{39}$$

wobei $\varepsilon = -1$, *wenn* $2 \mid Q_1$ *und* $2 \parallel y$, *sonst* $\varepsilon = 1$ *ist.*

Bemerkung. Aus diesem Satze interessiert uns hauptsächlich (37), (38), worauf wir noch zurückkommen.

Beweis. d sei nicht zulässig und t, u die Fundamentallösung von (1). Dann gilt (34), das sich auch in der Form

$$(t+1)(t-1) = du^2$$

schreiben läßt. Offenbar ist $2 \nmid t$, woraus $(t+1, t-1) = 2$, also

$$t + 1 = 2x^2 P_1 P_2^2, \quad t - 1 = 2y^2 Q_1 Q_2^2 \tag{40}$$

folgt, wobei x, y, P_1, P_2, Q_1, Q_2 positiv ganz sind, und $d = P_1 Q_1 P_2^2 Q_2^2$. Wir können P_1, Q_1 quadratfrei annehmen, wodurch die geforderte Eindeutigkeit gesichert ist. Aus (40) folgt durch Subtraktion (36), und (35) ist richtig wegen (34). Aus (36) ersieht man auch $(P_1 P_2, Q_1 Q_2) = 1$. $P_1 P_2 = 1$ ist unmöglich, da dann $d = Q_1 Q_2^2$ und somit nach (36) $x^2 - dy^2 = 1$ wäre. Da aber t, u die Fundamentallösung von (1) ist, wäre $t \leqq x$, was wegen (40) und $t > 1$ unmöglich ist. Auch $Q_1 Q_2 = 1$ ist nicht möglich, da sonst wegen (36) $dx^2 - y^2 = 1$ wäre, obwohl d nicht zulässig ist. Wir haben also auch $P_1 P_2, Q_1 Q_2 > 1$ bewiesen.

Aus (36) läßt sich (37) gleich ablesen, nur derjenige Teil von (37) ist besonders zu prüfen, der sich auf den eventuellen Primzahlfaktor 2 in den Nennern bezieht. Wegen $4 \nmid d$ ist $2 \nmid P_2, Q_2$; nur die Fälle $2 \mid P_1, 2 \mid Q_1$ sind also zu untersuchen. Im ersten Falle folgt aus (36) $2 \nmid x$, $y^2 Q_1 Q_2^2 \equiv 1 \pmod 8$, d. h. $Q_1 \equiv 1 \pmod 8$. Im zweiten Falle folgt ähnlich $2 \mid y$, $P_1 \equiv 1 \pmod 8$. (37) ist also in allen Teilen richtig.

Wir brauchen nur noch (38), (39) zu beweisen. Dazu werden wir nur (36) in Betracht ziehen. Da sowohl dies, als auch die zu beweisenden Tatsachen ungeändert bleiben, wenn wir das Vorzeichen von x, y abändern, lassen wir bei diesem Beweis die Annahme $x, y > 0$ fallen. Und zwar setzen wir im folgenden voraus, daß $x \equiv 1 \pmod 4$ und für $2 \nmid y$ auch $y \equiv 1 \pmod 4$ ist.

Wir setzen

$$P_1 = 2^a P_0, \quad Q_1 = 2^b Q_0, \quad y = 2^c y_0, \tag{41}$$

wobei $2^a \parallel P_1$, $2^b \parallel Q_1$, $2^c \parallel y$ ist. Dann ist

$$\left(\frac{Q_1}{P_1}\right)_4 = \left(\frac{Q_1}{2}\right)_4^a \left(\frac{Q_1}{P_0}\right)_4.$$

Der erste Faktor ist hier $i^{\frac{Q_1-1}{4}a} = (-1)^{\frac{Q_1-1}{8}a}$, wobei zu berücksichtigen ist, daß $2 \mid P_1$ für $a \neq 0$ ist, woraus wegen (37) $Q_1 \equiv 1 \pmod 8$ folgt. Der zweite Faktor läßt sich durch

$$\left(\frac{y^2 Q_1 Q_2^2}{P_0}\right)_4 \left(\frac{y Q_2}{P_0}\right)$$

ersetzen, wobei der erste Faktor wegen (36) gleich $\left(\frac{-1}{P_0}\right)_4 = (-1)^{\frac{P_0-1}{4}}$, der zweite Faktor wegen (41) gleich

$$\left(\frac{P_0}{yQ_2}\right) = \left(\frac{P_1}{yQ_2}\right)\left(\frac{2}{yQ_2}\right)^a = \left(\frac{P_1}{2}\right)^c \left(\frac{P_1}{y_0 Q_2}\right)\left(\frac{2}{yQ_2}\right)^a$$

ist, und diese Umformung ist auch dann richtig, wenn $2 \mid y$ oder $2 \mid P_1$ ist, da in diesen Fällen nach (36) und (41) $a = 0$ bzw. $c = 0$ und eine Potenz mit dem Exponenten 0 gleich 1 zu nehmen ist, ungeachtet der Basis der Potenz. Der mittlere Faktor des letzten Produkts ist wegen (36) gleich 1, die anderen zwei sind $(-1)^{\frac{P_1^2-1}{8}c}$ bzw. $(-1)^{\frac{y^2Q_1^2-1}{8}a}$. Aus all diesem erhalten wir

$$\left(\frac{Q_1}{P_1}\right)_4 = (-1)^{\frac{Q_1-1}{8}a + \frac{P_0-1}{4} + \frac{P_1^2-1}{8}c + \frac{y_2Q_2^2-1}{8}a}.$$

Dieser Exponent kommt nur mod 2 in Betracht, somit läßt sich die Summe des ersten und vierten Gliedes durch $\frac{y^2 Q_1 Q_2^2 - 1}{8} a$ ersetzen. Ist $a \neq 0$, d. h. $2 \mid P_1$, so läßt sich der letzte Zähler durch $P_1 - 2$ ersetzen, da beide Zahlen wegen (36) kongruent mod 16 sind; ist aber $a = 0$, so ist diese Ersetzung natürlich auch durchführbar. Auch das dritte Glied im vorigen Exponenten läßt sich durch $\frac{P_1 - 1}{4} c$ ersetzen, da im Falle $c \neq 0$ wegen (36) $2 \nmid P_1$, d. h. $P_1 \equiv 1 \pmod 4$ ist. Dieser Exponent geht dann in

$$\frac{P_0 - 1}{4} + \frac{P_1 - 1}{4} c + \frac{P_1 - 2}{8} a$$

über. Nun ist dies stets eine gerade Zahl. Denn entweder ist $a = 1$. Dann folgt wegen (36), (41) $c = 0$, und dies bedeutet, daß das mittlere Glied verschwindet und die zwei anderen gleich sind. Oder es ist $a = 0$. Dann ist die Summe der nichtverschwindenden Glieder gleich $\frac{P_1 - 1}{4}(1 + c)$. Dieses Produkt ist auch gerade, da im Falle $P_1 \equiv 5 \pmod 8$ wegen (36), (41) $c = 1$ ist. Damit ist (38) bewiesen.

Zum Beweis von (39) machen wir folgende Umformung, wobei wieder zu berücksichtigen ist, daß im Falle $b \neq 0$, d. h. $2 \mid Q_1$, wegen (37) $P_1 \equiv 1 \pmod 8$ ist:

$$\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)_4 = \left(\frac{P_1}{2}\right)_4^b \left(\frac{P_1}{Q_0}\right)_4 = (-1)^{\frac{P_1-1}{8}b} \left(\frac{x^2 P_1 P_2^2}{Q_0}\right)_4 \left(\frac{xP_2}{Q_0}\right).$$

Der mittlere Faktor ist wegen (36) gleich 1, der dritte Faktor gleich

$$\left(\frac{Q_0}{xP_2}\right) = \left(\frac{2}{xP_2}\right)^b \left(\frac{Q_1}{xP_2}\right).$$

Hierin ist der erste Faktor gleich $(-1)^{\frac{x^2P_2^2-1}{8}b}$, der zweite Faktor wegen (36) gleich $\left(\frac{-1}{x}\right)$. Somit folgt

$$\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)_4 = (-1)^{\frac{P_1-1}{8}b + \frac{x_2^2P_2^2-1}{8}b} \left(\frac{-1}{x}\right).$$

Der Exponent läßt sich durch $\frac{x^2 P_1 P_2^2 - 1}{8} b$ ersetzen, da für $b \neq 0$, wie schon erwähnt, $P_1 \equiv 1 \pmod 8$ ist. Der letzte Ausdruck geht nach (36) in $\frac{y^2 Q_1 Q_2^2}{8} b$ über. Nun sind die folgenden Fälle möglich: 1) $b = 0$; 2) $b = 1$, d. h. $2 \| Q_1$ und wegen (36) $2 \mid y$. Im Falle 1) ist der obige Ausdruck gerade, im Falle 2) ist er gerade oder ungerade, je nachdem $4 \mid y$ oder $4 \nmid y$ ist. Damit ist (39) und Satz 4 bewiesen.

§ 4.

Es sei nun d zulässig. Ich wähle dann nach dem Teil 3 von Satz 3 zwei ganze rationale Zahlen A, B so, daß

$$d = A^2 + B^2 \qquad ((A, B) = 1, \quad 2 \nmid A) \tag{42}$$

und A ein quadratischer Rest mod $4d$ ist, d. h. jedenfalls

$$\left(\frac{A}{p}\right) = 1 \qquad (p \mid d). \tag{43}$$

Sind α, β ganze Zahlen aus $R(i)$ und $(\alpha, \beta) = 1$, so setze ich

$$(\alpha, \beta)_4 = \left(\frac{N\alpha}{\beta}\right)_{i4} \left(\frac{N\beta}{\alpha}\right)_{i4}^{-1}. \tag{44}$$

Aus dieser Definition folgen die Regeln:

$$(\alpha, \beta)_4 = (\beta, \alpha)_4^{-1}, \tag{45}$$

$$(\alpha\beta, \gamma)_4 = (\alpha, \gamma)_4 (\beta, \gamma)_4, \qquad (\alpha, \beta\gamma)_4 = (\alpha, \beta)_4 (\alpha, \gamma)_4. \tag{46}$$

Es sei nun entweder α primär, d. h. $(1 + i)^3 \mid \alpha - 1$, oder α ein Produkt aus einer primären Zahl und einer Potenz $(1 + i)^e$ (e positiv ganz) und β primär. Dann gilt

$$(\alpha, \beta)_4 = \left(\frac{\alpha'}{\beta}\right)_i, \tag{47}$$

wobei der Strich die konjugierte Zahl in $R(i)$ und der Index i das zweite Potenzrestsymbol in $R(i)$ bezeichnet. Natürlich ist hier $(\alpha, \beta) = 1$ anzunehmen, da sonst (47) sinnlos ist.

Es genügt, (47) wegen (46) nur für den Fall zu beweisen, daß α ein Primideal ist. Übrigens werden wir (47) in anderen Fällen nicht brauchen.

Ist $\alpha = 1 + i$, so folgt nach der Definition und den Grundeigenschaften der Potenzrestsymbole:

$$(1 + i, \beta)_4 = \left(\frac{2}{\beta}\right)_{i4} \left(\frac{N\beta}{1 + i}\right)_{i4}^{-1} = \left(\frac{2}{\beta}\right)_{i4} i^{-\frac{N\beta - 1}{4}}$$

$$= \left(\frac{2}{\beta}\right)_{i4} \left(\frac{-i}{\beta}\right)_{i4} = \left(\frac{-2i}{\beta}\right)_{i4} = \left(\frac{(1-i)^2}{\beta}\right)_{i4} = \left(\frac{1-i}{\beta}\right)_i.$$

In diesem Falle ist also (47) richtig.

Wenn α primär ist, so folgt nach dem Reziprozitätsgesetze in $R(i)$[8]):

$$(\alpha, \beta)_4 = \left(\frac{N\alpha}{\beta}\right)_{i4} \left(\frac{N\beta}{\alpha}\right)_{i4}^{-1} = \left(\frac{N\alpha}{\beta}\right)_{i4} \left(\frac{\alpha}{N\beta}\right)_{i4}^{-1} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{i4} \left(\frac{\alpha'}{\beta}\right)_{i4} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{i4}^{-1} \left(\frac{\alpha}{\beta'}\right)_{i4}^{-1}.$$

Das Produkt des ersten und dritten Faktors ist gleich 1, die übrigen zwei Faktoren sind einander gleich, woraus (47) folgt.

Wir bestimmen nun das Vorzeichen von A und B in (42) so, daß

$$\delta = A + Bi \tag{48}$$

den Fällen $2 \nmid d$, $2 \mid d$ entsprechend gleich γ bzw. $(1 + i)\gamma$ ist, wobei γ jedesmal eine primäre Zahl aus $R(i)$ ist. Bei dieser Wahl von A, B bleibt (43) in Gültigkeit. Eine Änderung des Vorzeichens von A kann nämlich dort nur die Primzahl $p = 2$ berühren, und zwar nur im Falle $2 \mid d$. Dann ist wegen $(1 + i)^3 \mid \gamma - 1$ auch $4 \mid (1 + i)\gamma - (1 + i)$, d. h. $4 \mid \delta - (1 + i)$, woraus nach (48) $A \equiv 1 \pmod 4$ folgt. In diesem Falle geschah also die Wahl des Vorzeichens von A in (48) gerade so, daß dabei (43) für $p = 2$ gültig ist (natürlich gilt dann zugleich $A \equiv 1 \pmod 8$).

[8]) Vgl. Hasse, a. a. O.[7]), S. 106.

Nunmehr bedeute π einen Primidealfaktor von δ in $R(i)$, und zwar sei π primär oder $\pi = 1 + i$. Man setze

$$\delta = \pi^e \beta, \tag{49}$$

wobei $e(\geqq 1)$ und β durch $\pi^e \| \delta$ bestimmt sind. Unser Ziel ist jetzt, $(\pi, \beta)_4$ zu berechnen. Dazu setze ich mit ganzen rationalen Zahlen a, b, x, y, X, Y:

$$\gamma = a + bi, \tag{50}$$

$$\pi = x + yi, \tag{51}$$

$$\frac{\gamma}{\pi} = X + Yi. \tag{52}$$

Gleichung (52) bezieht sich nur auf den Fall $\pi \neq 1 + i$, während γ die vorige Bedeutung hat.

Erster Fall: $\pi \neq 1 + i$. Ich erkläre dann α durch

$$\gamma = \pi^e \alpha. \tag{53}$$

Durch Anwendung von (47) auf $(\pi, \alpha)_4 = (\alpha, \pi)_4^{-1}$ erhalten wir

$$(\pi, \alpha)_4 = \left(\frac{\alpha'}{\pi}\right)_i = \left(\frac{\pi'^{e-1}\alpha'}{\pi}\right)_i \left(\frac{\pi'}{\pi}\right)_i^{e-1}. \tag{54}$$

Für den zweiten Faktor besteht nach (51)

$$\left(\frac{\pi'}{\pi}\right)_i = \left(\frac{x - yi}{x + yi}\right)_i = \left(\frac{2x}{x + yi}\right)_i. \tag{55}$$

Hier ist aber

$$\left(\frac{x}{x + yi}\right)_i = 1. \tag{56}$$

Denn für die Primzahl p mit $\pi | p$ gilt, weil $p = x^2 + y^2$ und π primär, d. h. $2 \nmid x$ ist, offenbar $1 = \left(\frac{p}{x}\right) = \left(\frac{x}{p}\right)$, und das letztere Symbol ist gleich der linken Seite von (56). Wegen (56) folgt aus (55)

$$\left(\frac{\pi'}{\pi}\right)_i = \left(\frac{2}{p}\right). \tag{57}$$

Wegen (51), (52), (53) ist der erste Faktor in (54):

$$\left(\frac{X - Yi}{x + yi}\right)_i = \left(\frac{xX - xYi}{x + yi}\right)_i,$$

wobei wieder (56) angewandt wurde. Nach Addition des Yi-fachen Nenners zum Zähler erhalten wir daraus

$$\left(\frac{xX - yY}{x + yi}\right)_i.$$

Hier können wir statt des Nenners wieder p schreiben, während der Zähler wegen (50), (51), (52) gleich a ist. Dies und (57) liefert, in (54) eingesetzt,

$$(\pi, \alpha)_4 = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)^{e-1}. \tag{58}$$

Ist nun $2 \nmid d$, so ist $\delta = \gamma$ und nach (49), (53) $\beta = \alpha$, weiter nach (48), (50) $A = a$. Wegen (43) ist also der erste Faktor in (58) gleich 1, woraus

$$(59) \qquad (\pi, \beta)_4 = \left(\frac{2}{p}\right)^{e-1}$$

folgt, wobei ich wiederholen möchte, daß p durch $\pi \mid p$ definiert ist.

Ist aber $2 \mid d$, so ist $\delta = (1 + i)\gamma$ und nach (49), (53) $\beta = (1 + i)\alpha$. Aus (46) folgt also

$$(60) \qquad (\pi, \beta)_4 = (\pi, (1 + i)\alpha)_4 = (\pi, 1 + i)_4 \, (\pi, \alpha)_4 .$$

Statt des ersten Faktors können wir $(1 + i, \pi)_4^{-1}$ setzen. Hierauf und auf den zweiten Faktor können wir dann (47) bzw. (58) anwenden. Daraus folgt

$$(61) \qquad (\pi, \beta)_4 = \left(\frac{1 - i}{\pi}\right)\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)^{e-1}.$$

Für den mittleren Faktor können wir $\left(\frac{a}{\pi}\right)_i$ schreiben, dann ist das Produkt der zwei ersten Faktoren

$$\left(\frac{a - ai}{\pi}\right)_i .$$

Wegen $\pi \mid \gamma$ ist nach (50) $-ai \equiv -b \pmod{\pi}$; daher geht das letzte Symbol in

$$\left(\frac{a - b}{p}\right)$$

über. Wegen $\delta = (1 + i)\gamma$ ist jetzt nach (48), (50) $A = a - b$, so daß man nach (43) den Wert 1 erhält und somit aus (61) wieder (59) entsteht.

Zweiter Fall: $\pi = 1 + i$. Dann ist $2 \mid d$, $\delta = (1 + i)\gamma$ und nach (49) $e = 1$, $\beta = \gamma$. Aus (47) folgt also

$$(\pi, \beta)_4 = (1 + i, \gamma)_4 = \left(\frac{1 - i}{\gamma}\right)_i .$$

Wegen (50) hat dieses Symbol den Wert [9])

$$(-1)^{\frac{a-b-1}{4}} .$$

Wie wir gesehen haben, ist (für $2 \mid d$ immer) $A = a - b$, weiter folgt aus (43) $A \equiv 1 \pmod 8$. Die letzte Potenz ist also gleich 1, d. h. es ist auch $(\pi, \beta)_4 = 1$. Da $e = 1$ ist, sieht man, daß (59) auch jetzt, d. h. unbeschränkt gültig ist.

Nun behaupte ich die folgende Verallgemeinerung von (59):

Satz 5. *d sei zulässig und $d = Pg$ eine beliebige Zerlegung von d in zwei relativ prime positive ganze Faktoren. Es sei $P = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_l^{a_l}$,* wobei *$p_1, p_2, \ldots, p_l$ die verschiedenen Primzahlfaktoren von P und $a_1, a_2, \ldots, a_l$ positiv ganz sind; weiter sei $P_0 = p_1 p_2 \cdots p_l$. In der Darstellung $d = A^2 + B^2$ sollen die relativ primen ganzen rationalen Zahlen A, B so gewählt werden, daß $A + Bi$ primär oder das $(1 + i)$-fache einer primären Zahl und $\left(\frac{A}{p}\right) = 1$ $(p \mid d)$ ist; A, B lassen sich z. B. so wählen, daß $\mid A \mid, \mid B \mid$ die Pellsche Basis von d ist. Endlich sei*

$$\delta = A + Bi, \quad \pi_k = (p_k, \delta) \; (k = 1, 2, \ldots, l), \quad \gamma = (g, \delta).$$

Dann ist

[9]) Vgl. Hasse, a. a. O. [7]), S. 96.

$$\left(\frac{P_0}{\gamma}\right)_{i4}^{-1} \prod_{k=1}^{l} \left(\frac{g P P_0^{-a_k}}{\pi_k}\right)_{i4} = \left(\frac{2}{P P_0^{-1}}\right). \tag{62}$$

Bemerkung. Die Potenzrestsymbole verstehen wir später im multiplikativen Sinne, d. h. z. B. $\left(\frac{x}{y}\right)_{i4} = \left(\frac{xz^4}{y}\right)_{i4}$, wenn x, y, z Zahlen aus $R(i)$ und xz^4, y ganz sind. Schon (62) ist so zu verstehen. Wir sehen auch, daß der zweite Zähler in (62) zu π_k relativ prim ist. Im Falle $2 \nmid d$ ist das Vorzeichen von B willkürlich, nicht aber im Falle $2 \mid d$.

Beweis. Wir haben bereits gesehen, daß die Forderungen für die Wahl von A und B realisierbar sind. Wir wenden (59) auf den Fall $\pi = \pi_k$ an, wobei also jetzt $e = a_k$ und

$$\beta = \gamma \prod_{j=1}^{l}{}' \pi_j^{a_j}$$

zu setzen ist, wobei der Strich am Produktzeichen bedeutet, daß der Wert $j = k$ auszulassen ist. Damit dieser Anwendung nichts im Wege steht, können wir π_k durch eine primäre Zahl bzw. durch $1 + i$ repräsentieren und auch γ durch ein Produkt aus solchen Zahlen, was für das Bestehen von (62) offenbar gleichgültig ist. Wenn wir die linke Seite von (59) gleich nach (46) umformen, so erhalten wir

$$(\pi_k, \gamma)_4 \prod_{j=1}^{l} (\pi_k, \pi_j)_4^{a_j} = \left(\frac{2}{p_k^{a_k - 1}}\right),$$

wobei stets $(x, x)_4 = 1$ zu setzen ist. Durch Multiplikation über $k = 1, 2, \ldots, l$ entsteht nach (46):

$$(\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_l, \gamma)_4 \prod_{j,k=1}^{l} (\pi_k, \pi_j)_4^{a_j} = \left(\frac{2}{P P_0^{-1}}\right).$$

Hierauf wenden wir (44) an. Dies können wir (formal) auch mit den Faktoren $(x, x)_4 \,(= 1)$ tun, wodurch dann solche Produkte yy^{-1} auftreten, bei denen y sinnlos ist, die aber später von selbst herausfallen. So erhalten wir:

$$\left(\frac{P_0}{\gamma}\right)_{i4} \left(\frac{g}{\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_l}\right)_{i4}^{-1} \prod_{j,k=1}^{l} \left(\frac{p_k}{\pi_j}\right)_{i4}^{a_j} \prod_{j,k=1}^{l} \left(\frac{p_j}{\pi_k}\right)_{i4}^{-a_j} = \left(\frac{2}{P P_0^{-1}}\right).$$

Hier führen wir im ersten Produkt die Multiplikation über k, im zweiten die über j aus; dann entsteht

$$\left(\frac{P_0}{\gamma}\right)_{i4} \left(\frac{g}{\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_l}\right)_{i4}^{-1} \prod_{j=1}^{l} \left(\frac{P_0}{\pi_j}\right)_{i4}^{a_j} \prod_{k=1}^{l} \left(\frac{P}{\pi_k}\right)_{i4}^{-1} = \left(\frac{2}{P P_0^{-1}}\right).$$

Wenn wir hier noch k statt j schreiben und zum Reziproken übergehen, erhalten wir (62), womit der Satz bewiesen ist.

Satz 5 hat nur vorübergehende Bedeutung, da wir, wie schon erwähnt, solche Bedingungen suchen, die die rationalen Primfaktoren von d enthalten. Nun kommen zwar auch in (62) nur die Primidealfaktoren von d vor, diese Primfaktoren sind aber noch nicht unmittelbar durch d bestimmt, da von zwei konjugierten Primidealen jedesmal ein solches zu nehmen ist, das in $A + Bi$ aufgeht. Unter Umständen, d. h. für geeignete Zerlegungen $d = Pg$ kann es aber vorkommen, daß die Symbole $(\ )_{i4}$ in (62) durch Symbole $(\ )_4$ ersetzbar sind, und zwar dann, wenn die linke Seite sich als ein Produkt aus solchen Faktoren

$$\left(\frac{x}{\pi^a}\right)_{i4}^{\pm 1} = \left(\frac{x^a}{\pi}\right)_{i4}^{\pm 1}$$

schreiben läßt, die alle reell sind (x ganz rational, a positiv ganz, π Primideal in $R(i)$). Dies bedeutet nämlich, daß jedesmal x^a ein quadratischer Rest mod π ist, und in diesem Falle läßt sich dieses Symbol durch

$$\left(\frac{x^a}{p}\right)_4$$

ersetzen, wobei $\pi \mid p$ ist. Die aus (62) so entstehenden Bedingungen werden dann in obengenannter Hinsicht nichts zu wünschen übrig lassen.

Bevor wir diesen Weg einschlagen, will ich folgendes bemerken. Wir hatten die Gleichungen (62) aus den Gleichungen (59) (durch Multiplikation) erhalten, und diese sind auch in jenen enthalten, so daß also (59) und (62) im wesentlichen äquivalent sind. Die angekündigte Umformung wird aus (62) ein Gleichungssystem herstellen, das ich für den Augenblick mit (62′) bezeichne (dies enthält natürlich eventuell weniger Gleichungen als (62)). Ähnlich ist (59′) zu verstehen. Selbstverständlich enthält (62′) das System (59′). Nun ist zwar (62) eine Folgerung aus (59), doch gibt es solche d, für die (62′) keine Folgerung aus (59′) ist. Es kommt sogar vor, was ich später an einem Beispiel zeigen werde, daß (59′) leer ist, d. h. die genannte Umformung für keine Gleichung des Systems (59) möglich ist, während zur selben Zeit (62′) nicht leer ist. Das bedeutet, daß es ein wesentlicher Schritt war, von (59) auf (62) zu schließen.

Wir hätten auch dann eine schwächere Schlußfolgerung erhalten, wenn wir in diesem Paragraphen nur solche d in Betracht gezogen hätten, die von der Form m oder mp^2 sind (m quadratfrei, $p \nmid m$, $p \neq 2$), obwohl diese Einschränkung wegen der Sätze 1 und 2 völlig berechtigt erschienen wäre. Auch hierfür werde ich später ein Beispiel angeben.

Nunmehr beweise ich den folgenden

Satz 6. *d sei zulässig und $d = PQ$ eine beliebige Zerlegung von d in zwei relativ prime positive Faktoren. P_1 bzw. P_2 bedeute das Produkt der verschiedenen rationalen Primfaktoren von P, die in P in einer ungeraden bzw. geraden Potenz vorkommen, und ähnliches bedeute Q_1, Q_2 bezüglich Q. Dann gilt: Sobald nur*

$$\left(\left(\frac{P_1P_2}{Q_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{P_1Q_1}{P_2}\right)\right) = \left(\left(\frac{P_2Q_1}{P_1}\right)\right) = 1, \tag{63}$$

ist, ist auch

$$\left(\frac{P_1P_2}{Q_1}\right)_4 \left(\frac{P_1Q_1}{P_2}\right)_4 \left(\frac{P_2Q_1}{P_1}\right)_4 = \left(\frac{2P_1}{P_2}\right). \tag{64}$$

Beweis. Wir wenden auf die hier gegebene Zerlegung $d = PQ$ die Gleichung (62) an, für die wir gleich (63) voraussetzen. Statt der dortigen P_0, g sind jetzt P_1P_2, Q zu nehmen, es entsteht also

$$\left(\frac{P_1P_2}{\gamma}\right)_{i4}^{-1} \prod_{k=1}^{l} \left(\frac{QP(P_1P_2)^{-a_k}}{\pi_k}\right)_{i4} = \left(\frac{2}{P(P_1P_2)^{-1}}\right), \tag{65}$$

wobei jetzt γ ein ganzes Ideal aus $R(i)$ ist, ohne konjugierte Primfaktoren, mit der Bedingung $N\gamma = Q$, während π_k, a_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$ die gleiche Bedeutung haben wie im Satz 5. (Hier kommt es nicht darauf an, wie die Primidealfaktoren von γ und die π_k unter ihren konjugierten ausgewählt sind.)

Für den Augenblick bedeute π einen Primidealfaktor von γ aus $R(i)$, und es sei $\pi^e \| \gamma$. Der erste Faktor in (65) ist, vom Exponenten -1 abgesehen, das Produkt aller

$$\left(\frac{P_1P_2}{\pi^e}\right)_{i4}.$$

Ist $2 \nmid e$, d. h. $\pi | Q_1$, so kann man hier wegen des ersten Teils von (63) $N\pi$ statt π und gleichzeitig $(\ )_4$ statt $(\ )_{i4}$ schreiben. Im Falle $2 | e$ kann man ähnlich vorgehen, wenn man $\left(\frac{x}{p^2}\right)_4$ für $\left(\frac{x}{p}\right) = -1$ als $\left(\frac{x^2}{p}\right)_4$ definiert. In dem ersten Faktor dürfen wir also $N\gamma = Q$ statt γ und gleichzeitig $(\ )_4$ statt $(\ )_{i4}$ schreiben, wenn wir die multiplikative Eigenschaft $\left(\frac{x}{yz}\right)_4 = \left(\frac{x}{y}\right)_4 \left(\frac{x}{z}\right)_4$ für $(y, z) = 1$ auch bei den jetzt verallgemeinerten Symbolen aufrecht erhalten.

Nach dem zweiten und dritten Teil von (63) können wir die übrigen Faktoren auf der linken Seite von (65) ähnlich umformen, da die betreffenden Zähler in den Fällen $\pi_k | P_2$ und $\pi_k | P_1$, denen $2 | a_k$ bzw. $2 \nmid a_k$ entspricht, bis auf Quadratzahlfaktoren gleich $P_1 Q_1$ bzw. $P_2 Q_1$ sind.

Aus (65) folgt also mit der Bezeichnung $N\pi_k = p_k$:

$$\left(\frac{P_1 P_2}{Q}\right)_4 \prod_{k=1}^{l} \left(\frac{QP(P_1 P_2)^{-a_k}}{p_k}\right)_4 = \left(\frac{2}{P(P_1 P_2)^{-1}}\right), \tag{66}$$

wobei wir im ersten Faktor den Exponenten -1 fortlassen konnten, da dieser Faktor gleich ± 1 ist. (Wir sehen übrigens, daß (63) nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für die jetzt gemachte Umformung war.)

(66) läßt sich folgendermaßen vereinfachen. Der Nenner auf der rechten Seite ist nach Fortlassen von vollständigen Quadratfaktoren durch P_2 ersetzbar. Dann verändern wir den Zähler unter dem Produktzeichen durch Fortlassen von Faktoren, die vierte Potenzen sind. Um dies einfach machen zu können, bezeichne ich mit n_e $(e = 1, 2, 3, 4)$ das Produkt derjenigen Primzahlfaktoren von P, für die $a_k \equiv e \pmod 4$ ist. Dann läßt sich P offenbar durch $n_1 n_2^2 n_3^3$ ersetzen, während $P_1 = n_1 n_3$, $P_2 = n_2 n_4$ ist. Zugleich dürfen wir in (66) statt a_k jedesmal das ihm mod 4 kongruente e schreiben, und gleichzeitig multiplizieren wir die Faktoren, die zu demselben e gehören. Endlich läßt sich $Q = Q_1 m^2$ setzen, wobei m eine positive ganze Zahl ist. Dann geht (66) in die folgende Gleichung über:

$$\left(\frac{(n_1 n_2 n_3 n_4)}{Q_1 m^2}\right)_4 \prod_{e=1}^{4} \left(\frac{Q_1 m^2 n_1 n_2^2 n_3^3 (n_1 n_2 n_3 n_4)^{-e}}{n_e}\right)_4 = \left(\frac{2}{P_2}\right).$$

Nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz läßt sich m^2 streichen, die linke Seite ist also

$$\left(\frac{n_1 n_2 n_3 n_4}{Q_1}\right)_4 \left(\frac{n_2 n_3^2 n_4^3}{n_1}\right)_4 \left(\frac{n_1^3 n_3 n_4^2}{n_2}\right)_4 \left(\frac{n_1^2 n_2^3 n_4}{n_3}\right)_4 \left(\frac{n_1 n_2^2 n_3^3}{n_4}\right)_4.$$

Dies unterscheidet sich wegen $n_1 n_3 = P_1$, $n_2 n_4 = P_2$ von der linken Seite von (66) nur durch den Faktor

$$\left(\frac{n_3 n_4}{n_1}\right)\left(\frac{n_1 n_4}{n_2}\right)\left(\frac{n_1 n_2}{n_3}\right)\left(\frac{n_2 n_3}{n_4}\right) = \left(\frac{n_1 n_3}{n_2 n_4}\right) = \left(\frac{P_1}{P_2}\right).$$

Da die rechten Seiten der obigen Gleichung und von (66) sich ebenfalls voneinander nur um diesen Faktor unterscheiden, ist (66), d. h. der Satz 6 bewiesen.

Wir hatten beim Beweis aus (62) die Gleichungen (64) erhalten, die unter den Bedingungen (63) bestehen sollen. Derselbe Weg hätte, auf (59) angewandt, zu einem System geführt, das von (64) diejenigen Gleichungen enthält, in denen $P_1 P_2$ eine Primzahl ist. Wenn nun z. B. $d = p_1 p_2 p_3 p_4$ ist, wobei p_1, p_2, p_3, p_4 verschiedene ungerade Primzahlen sind, von denen jede quadratischer Nichtrest von jeder anderen ist, so sieht man leicht, daß jetzt unter den Gleichungen (64) keine solche vorkommt, in der $P_1 P_2$

eine Primzahl ist. Da nämlich d quadratfrei ist, ist $P_2 = Q_2 = 1$, $P_1 Q_1 = d$; wenn also dabei P_1 eine Primzahl ist, kann die Bedingung (63) nicht bestehen. Dagegen ist das System (64) nicht leer, da (63) z. B. für $P_1 = p_1 p_2$, $Q_1 = p_3 p_4$ erfüllt ist. Und zwar ist die entsprechende Gleichung des Systems (64) eine solche, die offenbar nicht identisch besteht. Mit diesem Beispiel ist gezeigt, daß der Übergang von (59) zu (62) ein wesentliches Glied unserer Schlußkette war.

Selbstverständlich sind die Gleichungen (64) im allgemeinen voneinander nicht unabhängig, worauf ich später noch näher zurückkommen werde.

§ 5.

Die Sätze 4 und 6 lassen sich als hinreichende bzw. notwendige Bedingungen für die Zulässigkeit von d formulieren. Um dies bequemer machen zu können, setze ich folgendes fest:

Ich bezeichne mit e bzw. f das Produkt derjenigen verschiedenen Primzahlen, die in d in ungerader bzw. gerader Potenz aufgehen. Dann ist $e > 1$, $2 \nmid f$. Ich nenne ein Zahlenpaar a, b eine d-Zerfällung, wenn a, b positiv ganz sind und $ab = e$. Die d-Zerfällungen a, b und b, a sind als nicht verschieden zu betrachten.

Ein Zahlentripel a, b, c nenne ich eine ergänzte d-Zerfällung, wenn a, b eine d-Zerfällung und c ein positiver Teiler von f ist, wobei die Reihenfolge von a und b wieder unberücksichtigt bleiben soll. Die ergänzte d-Zerfällung $a, b, 1$ soll von der d-Zerfällung a, b als nicht verschieden gelten. Wenn Mißverständnisse nicht zu befürchten sind, sage ich statt ergänzte d-Zerfällung einfach nur d-Zerfällung, wenn es dagegen nötig wird, nenne ich die übrigen d-Zerfällungen gewöhnliche d-Zerfällungen.

Die d-Zerfällungen bilden eine abelsche Gruppe G nach der Zusammensetzungsregel

$$(a, b, c)\,(a_1, b_1, c_1) = (aa_1), (ba_1), (cc_1),$$

wobei die Klammern auf der rechten Seite das Streichen der Quadratzahlfaktoren bedeuten. Die gewöhnlichen d-Zerfällungen bilden eine Untergruppe g von G. G ist vom Typus $(2, 2, \ldots, 2)$, das Einheitselement ist $1, e, 1$ $(= e, 1, 1)$. Letzteres nenne ich auch die uneigentliche d-Zerfällung, während die übrigen die eigentlichen d-Zerfällungen sind. Die Ordnung von G bzw. g ist $2^{\nu-1}$ bzw. $2^{\mu-1}$, wobei ν und μ die Anzahl der Primfaktoren von ef bzw. e bezeichnen.

Die d-Zerfällung a, b, c heißt von der 2. Art, wenn

$$\left(\left(\frac{ac}{b}\right)\right) = \left(\left(\frac{bc}{a}\right)\right) = \left(\left(\frac{ab}{c}\right)\right) = 1$$

ist. Insbesondere ist also die d-Zerfällung a, b $(= a, b, 1)$ dann und nur dann von der 2. Art, wenn

$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)\right) = \left(\left(\frac{b}{a}\right)\right) = 1$$

ist. Auch die uneigentliche d-Zerfällung ist also von der 2. Art.

Wir behaupten, daß die d-Zerfällungen 2. Art eine Gruppe G_2 bilden, woraus dann folgt, daß auch die gewöhnlichen d-Zerfällungen 2. Art eine Gruppe g_2 bilden, die der Durchschnitt von g mit G_2 ist.

Zwei d-Zerfällungen können nämlich stets in der Form

$$\Delta = AB, CD, EF; \quad \Delta_1 = AC, BD, EH$$

angenommen werden, wobei $A, B, \ldots, H$ positiv ganz sind, $ABCD = e$, $EFH \mid f$. Die zusammengesetzte d-Zerfällung ist dann $\Delta\Delta_1 = BC, AD, FH$. Sind nun Δ, Δ_1 von der 2. Art, so ist (man beachte, daß $\left(\left(\frac{x}{y}\right)\right) = 1$, $\left(\left(\frac{x}{z}\right)\right) = 1$ äquivalent $\left(\left(\frac{x}{yz}\right)\right) = 1$ ist):

$$\left(\left(\frac{ABEF}{C}\right)\right) = 1, \left(\left(\frac{ABEF}{D}\right)\right) = 1; \left(\left(\frac{CDEF}{A}\right)\right) = 1, \left(\left(\frac{CDEF}{B}\right)\right) = 1;$$
$$\left(\left(\frac{ABCD}{E}\right)\right) = 1, \left(\left(\frac{ABCD}{F}\right)\right) = 1$$

und

$$\left(\left(\frac{ACEH}{B}\right)\right) = 1, \left(\left(\frac{ACEH}{D}\right)\right) = 1; \left(\left(\frac{BDEH}{A}\right)\right) = 1, \left(\left(\frac{BDEH}{C}\right)\right) = 1;$$
$$\left(\left(\frac{ABCD}{E}\right)\right) = 1, \left(\left(\frac{ABCD}{H}\right)\right) = 1.$$

Die zu beweisenden Gleichungen lauten:

$$\left(\left(\frac{BCFH}{A}\right)\right) = 1, \left(\left(\frac{BCFH}{D}\right)\right) = 1; \left(\left(\frac{ADFH}{B}\right)\right) = 1, \left(\left(\frac{ADFH}{C}\right)\right) = 1;$$
$$\left(\left(\frac{ABCD}{F}\right)\right) = 1, \left(\left(\frac{ABCD}{H}\right)\right) = 1.$$

Diese insgesamt achtzehn Gleichungen nenne ich der Reihe nach kurz 11, 12, ..., 16; 21, ...; ..., 36. Aus den Gleichungen 13, 23 folgt für $p \mid A$

$$\left(\frac{CDEF}{p}\right) = 1, \left(\frac{BDEH}{p}\right) = 1.$$

Daraus entsteht durch Multiplizieren offenbar

$$\left(\frac{BCFH}{p}\right) = 1,$$

was gerade die Richtigkeit der Gleichung 31 bedeutet. Ähnlich folgen die Gleichungen 32, 33, 34 der Reihe nach aus den Gleichungspaaren 12, 22; 14, 21; 11, 24, während die Gleichungen 35, 36 nichts anderes als die Gleichungen 16, 26 sind. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nun lauten die angekündigten Sätze so:

Satz 7. *Ist*

$$\left(\left(\frac{e}{f}\right)\right) = -1 \tag{67}$$

(woraus folgt, daß es keine d-Zerfällung a, b, c von der 2. Art mit $c > 1$ gibt) und ist für jede eigentliche d-Zerfällung a, b $(= a, b, 1)$ von der 2. Art

$$\left(\frac{a}{b}\right)_4 = \left(\frac{b}{a}\right)_4 = -1, \tag{68}$$

so ist d zulässig.

Satz 8. *Gibt es eine d-Zerfällung a, b, c von der 2. Art, für die*

$$\left(\frac{ac}{b}\right)_4 \left(\frac{bc}{a}\right)_4 \left(\frac{ab}{c}\right)_4 = -\left(\frac{2a}{c}\right) \tag{69}$$

gilt, so ist d nicht zulässig.

Bemerkungen. Der Satz 7 ist natürlich so zu verstehen, daß d auch dann zulässig ist, wenn (67) besteht und es keine d-Zerfällung a, b $(= a, b, 1)$ von der 2. Art gibt (vgl.

unten Satz 9a). Da nach einem älteren Satze von mir das Fehlen der eigentlichen d-Zerfällungen a, b der 2. Art bedeutet, daß es in der (im engeren Sinne genommenen) absoluten Klassengruppe des Körpers $R(\sqrt{d})$ keine durch 4 teilbare Invariante gibt, und (67) bedeutet, daß im Körper $R(\sqrt{d}) = R(\sqrt{e})$ die Primzahlfaktoren von f unzerlegbar sind, so folgt aus Satz 7 der folgende

Satz 9. *Gibt es in der absoluten Klassengruppe des quadratischen Zahlkörpers* $R(\sqrt{d})$ *keine durch 4 teilbare Invariante und zerfällt kein Primzahlfaktor von d in diesem Körper voll (d. h. in ein Produkt von zwei verschiedenen Primidealen), so ist d zulässig.*

Nachher werde ich die folgende merkwürdige Tatsache beweisen:

e. *Ist* $\left(\left(\frac{e}{f}\right)\right) \neq -1$, *so gibt es wenigstens eine eigentliche d-Zerfällung 2. Art.*

Umgekehrt gilt also, wenn es keine solche d-Zerfällung gibt, auch (67), und somit erhalten wir den folgenden besonderen Fall von Satz 7, der eine wörtliche Verallgemeinerung eines älteren Satzes von mir ist (dieser war nämlich bisher nur für quadratfreie d bekannt):

Satz 9a. *Gibt es keine eigentliche d-Zerfällung 2. Art, so ist d zulässig.*

Dazu ist zu bemerken, daß, wie man leicht feststellen kann, die Sätze 9 und 9a voneinander nur insofern abweichen, als die im Satze 9a umfaßten Fälle im Satze 9 anders charakterisiert wurden.

In der Arbeit R. 2 werde ich beweisen, daß (68) nur dann für alle eigentlichen d-Zerfällungen a, b von der 2. Art erfüllt sein kann, wenn ihre Anzahl höchstens 3 (d. h. die Ordnung von g_2 höchstens 4) ist. Dies bedeutet nach meinem oben erwähnten Satze weiter, daß dann die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten in der absoluten Klassengruppe des Körpers $R(\sqrt{d})$ höchstens 2 ist. Auch hier bemerke ich also folgendes (die Arbeit R. 2 wird in dieser Richtung für quadratfreie d nähere Untersuchungen enthalten):

Die Anwendbarkeit des Satzes 7 hört völlig auf, wenn es in der absoluten Klassengruppe des Körpers $R(\sqrt{d})$ wenigstens drei durch 4 teilbare Invarianten gibt. (In der Arbeit R. 2 wird sich übrigens herausstellen, daß dieser Fall ziemlich selten eintritt.)

Beweis des Satzes 7. Wir nehmen an, daß sowohl (67) als auch (68), letzteres für jede eigentliche d-Zerfällung a, b von der 2. Art, erfüllt wird und d trotzdem nicht zulässig ist. Dann sind (mit den Bezeichnungen des Satzes 4) (37), (38) erfüllt, weiter ist $P_1 Q_1 = e$, und die verschiedenen Primzahlfaktoren von $P_2 Q_2$ stimmen mit den Primzahlfaktoren von f überein. $P_1 = 1$ ist nicht möglich, da dann $Q_1 = e$ ist, woraus nach (37) $\left(\left(\frac{e}{P_2}\right)\right) = 1$, d. h. wegen (67) $P_2 = 1$ folgt, obwohl $P_1 P_2 > 1$ sein soll. Ähnlich folgt auch die Unmöglichkeit von $Q_1 = 1$. Es ist also P_1, Q_1 eine eigentliche d-Zerfällung, die außerdem von der 2. Art ist, da aus (37)

$$\left(\left(\frac{Q_1}{P_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)\right) = 1$$

folgt. Wegen (38) haben wir also einen Widerspruch zu (68), woraus die Richtigkeit des Satzes 7 folgt.

Der Satz 8 ist offenbar nichts anderes als die Umkehrung des Satzes 7, da die dortigen P_1, Q_1, P_2 gerade der Definition der d-Zerfällungen entsprechen.

Beweis von **e.** Dabei stütze ich mich auf eine frühere Arbeit[10]) von mir. Ich nehme

[10]) L. Rédei, Arithmetischer Beweis des Satzes über die Anzahl der durch vier teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper, dieses Journ. **171** (1934), S. 55—60. Diese Arbeit wird im folgenden mit R. 3 zitiert.

an, daß es keine einfache d-Zerfällung $a, b (= a, b, 1)$ von der 2. Art gibt, da sonst die Behauptung richtig ist. Dies bedeutet in der Sprache der Arbeit R. 3, daß es keine eigentliche „D-Zerfällung" 2. Art gibt, wobei jetzt $D = e$ oder $4e$ ist, je nachdem $2 \nmid e$ oder $2 \mid e$ ist. Dies bedeutet wieder, daß in der dortigen Matrix M_D keine „Einheitsmenge" der Spalten vorhanden ist, außer der leeren Menge (vgl. den Satz und **a.** in der Arbeit R. 3, S. 60). Wenn nun die Voraussetzung $\left(\left(\frac{e}{f}\right)\right) \neq -1$ von **e.** besteht, so gibt es ein p mit $p \mid f$ und $\left(\frac{e}{p}\right) = 1$. Wir fügen der Matrix M_D als eine neue letzte Spalte die Elemente $\left(\frac{p}{p_k}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, t)$ hinzu, wobei $p_1, p_2, \ldots, p_t$ die dortige Bedeutung haben (es sind die verschiedenen Primzahlfaktoren von D, in der dort gegebenen Reihenfolge). In der so erhaltenen quadratischen Matrix M bilden alle Zeilen wegen der Voraussetzung $\left(\frac{e}{p}\right) = \left(\frac{p}{e}\right) = 1$ offenbar eine Einheitsmenge. Unter Anwendung von **7.** aus der Arbeit R. 3 folgt also, daß sich eine Einheitsmenge auch aus den Spalten von M bilden läßt, die nicht leer ist. Nach dem obigen enthält diese Menge gewiß auch die letzte Spalte von M, sonst wäre nämlich diese Menge schon aus der Matrix M_D zu bilden. Die Auswertung dieser Tatsache mit $\left(\frac{e}{p}\right) = 1$ zusammen führt gerade auf das Vorhandensein einer eigentlichen d-Zerfällung a, b, p von der 2. Art, wie es in **e.** behauptet wurde.

Es sollen noch einige Bemerkungen zu den bewiesenen Sätzen folgen: Wenn (64) für die d-Zerfällung P_1, Q_1, P_2 von der 2 .Art besteht und das gleiche auch von einer zweiten d-Zerfällung (ebenfalls 2. Art) gilt, dann wird (64) auch von der daraus zusammengesetzten d-Zerfällung erfüllt. Dies läßt sich leicht durch unmittelbare Rechnung bestätigen, ähnlich wie wir die Gruppeneigenschaft der d-Zerfällungen 2. Art bewiesen haben, ist aber auch daraus zu ersehen, daß die Gleichungen (64) einen Teil der Gleichungen (62) bilden, die wieder durch Multiplikation aus den Gleichungen (59) entstanden. Die Gleichungen (64) sind also nicht unabhängig, sondern lassen sich alle aus denjenigen Gleichungen (64) folgern, die sich auf die Elemente einer unabhängigen Basis der Gruppe G_2 aller d-Zerfällungen 2. Art beziehen. Dies ist die Bemerkung, die ich am Ende des § 4 angekündigt habe.

Umgekehrt genügt es also, bei der Anwendung des Satzes 8 zu prüfen, ob die Gleichung (69) für die Elemente einer beliebig gewählten unabhängigen Basis der Gruppe aller d-Zerfällungen 2. Art gilt. Wenn wir nämlich feststellen, daß (69) für kein Basiselement erfüllt ist, dann besteht (64) für alle Elemente dieser Gruppe, d. h. dann trifft (69) überhaupt nicht zu.

Wir sehen, daß wir den Satz 7 auch so hätten gewinnen können, daß wir diesen Satz zunächst nur für die Zahlen d der Form m, mp^2 beweisen (m quadratfrei, $p \nmid m$) und dann die Sätze 1 und 2 anwenden. Dieser Weg wäre aber nicht kürzer gewesen, und davon abgesehen wollten wir den Satz 4 in der dortigen möglichst allgemeinen Form gewinnen.

Ähnlich hätte es genügt, den Satz 8 zunächst nur für die Fälle $d = mn^2$ zu beweisen, wobei m und n quadratfreie, relativ prime ganze Zahlen sind ($n \geqq 1$), und dann den Satz 1 anzuwenden. Dadurch wäre aber die Betrachtung auch nicht wesentlich verkürzt worden. Es wäre dagegen unmöglich gewesen, bei dem Beweis des Satzes 8 von Satz 2 Gebrauch zu machen. Anders gesagt, wenn wir Satz 8 zunächst nur für die

Zahlen d der Form m, mp^2 abgeleitet hätten (m quadratfrei, $p \nmid m$), dann wäre es nicht möglich gewesen, daraus mit Hilfe der Sätze 1 und 2 auf den vollen Satz 8 zu schließen (vgl. die Einleitung). Dies wird aus dem folgenden Beispiel klar.

Ich nehme $d = pqr^2s^2$ an, wobei p, q, r, s verschiedene ungerade Primzahlen sind (natürlich alle $\equiv 1 \pmod 4$), die zueinander paarweise quadratische Nichtreste sind, mit Ausnahme des Paares p, q, wofür $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$ ist. Weiter sei

$$\left(\frac{p}{q}\right)_4 = \left(\frac{q}{p}\right)_4 = 1 \tag{70}$$

und

$$\left(\frac{pq}{rs}\right)_4 \left(\frac{rs}{pq}\right)_4 = -\left(\frac{2}{rs}\right). \tag{71}$$

Daß diese Forderungen sogar unendlich oft verwirklicht werden können, folgt leicht aus dem Dirichletschen Satz über die arithmetische Progression im Körper $R(i)$ und dem biquadratischen Reziprozitätsgesetz. Jetzt ist $1, pq, rs$ eine d-Zerfällung 2. Art, somit folgt wegen (71) aus dem Satze 8, daß d nicht zulässig ist. Wenn wir aber die Zahlen $d = pq, pqr^2, pqs^2$ betrachten, können wir leicht feststellen, daß der Satz 8 auf keine von ihnen anwendbar ist. (Ähnliches gilt auch von Satz 7, so daß also das Verhalten dieser Zahlen völlig unaufgeklärt bleibt.) Es ist nämlich für $d = pq$ nur p, q $(= p, q, 1)$ eine eigentliche d-Zerfällung 2. Art, für die aber (69) wegen (70) nicht erfüllt ist. Wörtlich dasselbe gilt auch für $d = pqr^2$ und $d = pqs^2$, woraus unsere Behauptung zu ersehen ist.

Ich bemerke schließlich folgendes über die Anwendbarkeit der Sätze 7 und 8: Ich nehme d in der Form $d = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ an, wobei $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ und $a_1, a_2, \ldots, a_k$ positive ganze Zahlen sind. Das System $a_1, a_2, \ldots, a_k; \left(\frac{p_m}{p_n}\right)$ $(1 \leqq m < n \leqq k)$ nenne ich den Typus von d. Dann gilt:

Für jeden Typus ist wenigstens bei der Hälfte der Fälle auf Grund der Sätze 7 und 8 entscheidbar, ob d zulässig ist. Dies verstehe ich folgendermaßen: Ich bezeichne mit x_1 die Anzahl derjenigen d, die einem festen Typus angehören und ein beliebig gegebenes $x(>0)$ nicht überschreiten. Davon bezeichne ich die Anzahl derer, für die die Frage der Zulässigkeit mit Hilfe der Sätze 7 und 8 entscheidbar ist, mit x_2. Dann ist für jeden Typus

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{x_2}{x_1} \geqq \frac{1}{2}.$$

Da eine viel stärkere Aussage möglich ist, deute ich den Beweis hier nur kurz an. (Diese Frage untersuche ich für quadratfreie d in der Arbeit R. 2 ausführlich, während ich auf den allgemeinen Fall später zurückzukommen hoffe.)

Ich nehme ein beliebiges d an und betrachte alle Zahlen d_1, die demselben Typus wie d angehören; die Anzahl solcher d_1 ist für jeden Typus unendlich. Gibt es für d keine eigentliche d-Zerfällung 2. Art, so ist gleiches für jedes d_1 richtig. In diesem Falle ist der Satz 9a (der einen Teil des Satzes 7 bildet) für jedes d_1 anwendbar. Jetzt ist also die obige Behauptung richtig (sogar $x_1 = x_2$). Gibt es aber eine eigentliche d-Zerfällung a, b, c von der 2. Art, so gibt es auch ein Zahlentripel a_1, b_1, c_1, das dieselbe Eigenschaft in bezug auf d_1 aufweist. Man erhält es dadurch, daß in a, b, c die Primzahlfaktoren von d durch die entsprechenden Primzahlfaktoren von d_1 ersetzt werden, wobei man sich auch die Primfaktoren von d_1 der Größe nach geordnet zu denken hat und solche Primfaktoren

von d und d_1 als entsprechend bezeichnet, die denselben Index haben. Es läßt sich dann zeigen, daß im asymptotischen Sinne für die Hälfte aller a_1, b_1, c_1 die Gleichung (69) gilt, d. h. der Satz 8 anwendbar ist, woraus die Behauptung folgt.

§ 6.

Jetzt soll p eine positive Primzahl der Form $8k + 1$ bedeuten. Dann existieren Darstellungen $2p = a^2 + b^2$, $p = \alpha^2 + 8\beta^2$, wobei a, b, α, β ganze rationale Zahlen sind und $a \equiv \pm b \pmod 8$ ist. Bekanntlich sind die Zahlen a, b, α, β, vom Vorzeichen und von der Reihenfolge von a, b abgesehen, durch p eindeutig bestimmt. Epstein [6]) hat folgenden Satz bewiesen [11]):

Diejenigen p, für die $a\ (\equiv \pm b) \equiv \pm 3 \pmod 8$ ist, stimmen mit denen überein, für die $2 \nmid \beta$ ist, und für alle diese p ist $d = 2p$ und $d = 2p^2$, allgemein also $d = 2p^n$ (n positiv ganz) nicht zulässig.

Dieser Satz läßt sich auf Grund des Satzes 8 mit Hilfe der folgenden Bemerkung leicht beweisen:

Es gilt immer

$$\left(\frac{2}{p}\right)_4 \left(\frac{p}{2}\right)_4 = \left(\frac{2}{a}\right) = (-1)^{\beta}. \tag{72}$$

Ist nämlich (72) erfüllt, so bedeutet dies zunächst die Richtigkeit der ersten Behauptung des Satzes. Weiter sehen wir, daß, den Fällen $d = 2p, 2p^2$ entsprechend, $2, p\,(= 2, p, 1)$ bzw. $2, 1, p$ eine (eigentliche) d-Zerfällung 2. Art ist. Für beide geht (69) in

$$\left(\frac{p}{2}\right)_4 \left(\frac{2}{p}\right)_4 = -1$$

über, und diese Gleichung ist für $2 \nmid \beta$ nach (72) richtig. Aus dem Satze 8 folgt also der obige Satz. Wir müssen nur noch (72) beweisen.

Mit geeignetem Vorzeichen können wir $a \equiv b \pmod 8$ annehmen. Dann folgt [8]) wegen $p = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$:

$$\left(\frac{2}{p}\right)_4 = (-1)^{\frac{a-b}{8}}.$$

Weiter ist

$$\left(\frac{p}{2}\right)_4 = (-1)^{\frac{p-1}{8}}. \tag{73}$$

Wir behaupteten in (72) vor allem, daß das Produkt der rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen gleich $\left(\frac{2}{a}\right) = (-1)^{\frac{a^2-1}{8}}$ ist. Wir brauchen also nur noch zu prüfen, ob $16 \mid a - b + p - a^2$, d. h. $32 \mid 2a - 2b + 2p - 2a^2$, d. h. $32 \mid 2a - 2b + b^2 - a^2$, d. h. $32 \mid (b - a)(b + a - 2)$ ist; dies folgt aber in der Tat aus $a \equiv b \pmod 8$.

Die zweite Hälfte von (72) läßt sich mit Hilfe eines ähnlichen Verfahrens beweisen, wie es schon im § 3 angewandt worden ist, und zwar auf Grund der Gleichung $p = \alpha^2 + 8\beta^2$.

---

[11]) Ein Teil dieses Satzes findet sich schon bei J. Perott, Sur l'équation $t^2 - Du^2 = -1$, dieses Journal **102** (1888), S. 185—223.

Dazu setzen wir $\beta = 2^x \beta_0$, wobei $2^x \| \beta$ ist. Wegen $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)_4 = 1$ folgt dann:

$$\left(\frac{2}{p}\right)_4 = \left(\frac{8}{p}\right)_4 = \left(\frac{8\beta^2}{p}\right)_4 \left(\frac{\beta}{p}\right) = \left(\frac{-\alpha^2}{p}\right)_4 \left(\frac{\beta_0}{p}\right) = \left(\frac{\alpha}{p}\right)\left(\frac{\beta_0}{p}\right) = \left(\frac{p}{\alpha}\right)\left(\frac{p}{\beta_0}\right) = \left(\frac{2}{\alpha}\right).$$

Andererseits folgt aus (73):

$$\left(\frac{p}{2}\right)_4 = (-1)^{\frac{\alpha^2+8\beta^2-1}{8}} = \left(\frac{2}{\alpha}\right)(-1)^{\beta^2} = \left(\frac{2}{\alpha}\right)(-1)^{\beta}.$$

Daraus erhalten wir durch Multiplikation die zweite Hälfte von (72), d. h. auch den obigen Satz.

§ 7.

Es besteht der folgende

Satz 10. *Ist eine beliebige feste zulässige Zahl d gegeben, durchläuft t, u alle positiven Lösungen von* (3) *und m alle ganzen rationalen Zahlen, so sind die Zahlen*

$$d_1 = d + 2tm + u^2 m^2 \tag{74}$$

alle zulässig, wenn nicht $d_1 = 1$ ist; dieser Fall tritt nur für $d = 1 + B^2, t = B, u = 1, m = -B$ (B positiv ganz) ein. Alle so entstandenen Zahlen d_1 sind verschieden mit folgenden beiden Ausnahmen: a) *Der Fall $d_1 = d$ entsteht mit $m = 0$ (t, u beliebig) und bei $d = 1 + B^2$ mit $m = -2B, t = B, u = 1$.* b) *Bei $d = 1 + B^2$ entsteht jeder Fall $d_1 = 1 + B_1^2$ ($\neq 1, d$) zweimal, und zwar mit $m = -B \pm B_1, t = B, u = 1$ (B, B_1 positiv ganz, $B_1 \neq B$).*

Bemerkungen. Die Zulässigkeit der Zahlen d_1 in (74) folgt unmittelbar aus der folgenden Identität, die zugleich mit (3) erfüllt ist:

$$(t + u^2 m)^2 - (d + 2tm + u^2 m^2) u^2 = -1, \tag{75}$$

ist aber auch eine Folgerung aus dem Teil 3 im Satze 3, wo wir uns jedenfalls nur für die Pellsche Basis interessierten [12]). Dort hatten wir auch gesehen, daß der Fall $d_1 = 1$ nur in dem im Satz 10 genannten Ausnahmefall eintreten kann; auch dies läßt sich aber unmittelbar aus (75) folgern. Wenn nämlich $d_1 = 1$ ist, geht (75) in $(t + u^2 m)^2 = u^2 - 1$ über, woraus $u = 1, t = -m$, $d = 1 + m^2$ folgt, wie behauptet wurde.

Die einzige nicht triviale Behauptung des Satzes 10 ist also nur, daß bei festem d die Zahlen d_1 in (74) verschieden sind, abgesehen von den dort genannten Fällen a), b). Diese Behauptung kann ich nicht ebenso einfach beweisen, sondern nehme dazu den Begriff der Pellschen Basis zu Hilfe. Hierbei wird unter anderem die im Teil 3 des Satzes 3 erwähnte Eindeutigkeit angewandt, was ich in der Einleitung schon bemerkte. Auch dieser Umstand rechtfertigt die Einführung des Begriffs „Pellsche Basis".

Man kann die Frage stellen: *Welche quadratischen Funktionen*

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{76}$$

stellen für $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ausschließlich zulässige Zahlen d (darunter eventuell 1) dar?

Hierüber gilt: *Wenn die Diskriminante von $f(x)$*

$$b^2 - 4ac = -4r^2 \neq 0 \quad \textit{und} \quad a = r^2 s^2$$

ist, wobei r, s, b, c ganze rationale Zahlen sind, so gehört $f(x)$ zu den genannten Funktionen.

Dann ist nämlich offenbar $2r \mid b$, und somit folgt die Behauptung aus der Identität

$$\left(\frac{b}{2r} + rs^2 x\right) - f(x) \cdot s^2 = -1.$$

---

[12]) Vgl. J. Romero, L'Intermédiaire des math. **9** (1902), S. 182.

Es scheint mir wahrscheinlich zu sein, daß wir damit alle gesuchten Funktionen erhalten haben. Zu ihnen gehört jedenfalls die rechte Seite von (74), falls jetzt m als Variable gedacht wird. Ähnliches gilt von den wohlbekannten Beispielen $x^2 + 1$, $(2x + 1)^2 + 4$ und von den zwei Beispielen am Ende des § 2, wenn darin erst die Substitution $f = 4x + 1$ bzw. $f = nx + 2$ ausgeführt wird, ebenso vom Beispiel

$$\left(px + \frac{q(q^2+1)}{2p}\right)^2 + 2qx + \left(\frac{q^2+1}{p}\right)^2$$

von C. Bodlund [13]), bei dem p, q beliebige ganze rationale Zahlen sind, die den Bedingungen $p \mid q^2 + 1$, $2 \nmid p$, wie leicht zu sehen ist, unterworfen sind.

(Umgekehrt ist leicht zu sehen, daß die genannten Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ im wesentlichen mit (74) übereinstimmen, da sie alle aus (74) durch die Substitution $m = rx$ entstehen, mit der einzigen Ausnahme $r^2x^2 + 1$.)

Beweis des Satzes 10. Wir brauchen also nur noch zu beweisen, daß die Zahlen d_1 in (74) bei festem d bis auf die Ausnahmefälle a), b) verschieden sind. Es sei also ein zulässiges d gegeben und A, B (> 0) sei die Pellsche Basis von d. Ich werde wieder die Bezeichnungen x_n, y_n, t_{2n+1}, u_{2n+1} $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ benutzen, die im Teil 5 des Satzes 3 eingeführt worden sind.

Ich schicke zunächst die folgende einfache Bemerkung voraus, von der ich öfter Gebrauch machen werde: $x_n y_n = 0$ ist gleichbedeutend mit

$$n = 0, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0, \quad A = 1, \quad d = 1 + B^2, \quad t_1 = B, \quad u_1 = 1.$$

Aus dem über (17), (18) Gesagten folgt nämlich, daß immer x_n, y_n relativ prim sind. Im Falle $x_n y_n = 0$ ist also von den beiden Zahlen x_n und y_n immer die eine 0, die andere ± 1. Also ist $x^2 + y^2 = 1$, woraus nach der Definition im Teil 5 des Satzes 3 folgt, daß $n = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ ist. Daraus gewinnen wir leicht den Rest der Behauptung.

Wenn wir das über (19), (20), (21) Bewiesene auf den Fall $a = b = 0$ anwenden, wobei wir auch $|A| = A$, $|B| = B$ berücksichtigen, so erhalten wir:

$$(77) \qquad (x_n^2 - y_n^2)(-1)^n A - 2x_n y_n (-1)^n B = 1,$$

$$(78) \qquad t_{2n+1} = |(x_n^2 - y_n^2) B + 2x_n y_n A|.$$

Da t_{2n+1}, u_{2n+1} eine Lösung von (3) ist, ist nach dem Teil 1 des Satzes 3

$$(79) \qquad u_{2n+1} = x_n^2 + y_n^2.$$

Aus (77) folgt nach dem Teil 6 des Satzes 3 (mit Anwendung auf $(-1)^n m$ statt m), daß das Zahlenpaar

$$(80) \qquad |A + 2x_n y_n m|, \quad |B + (x_n^2 - y_n^2) m|$$

eine Pellsche Basis einer Zahl d_{mn} ist oder daß dieses Zahlenpaar gleich 1, 0 ist. Setzt man in diesem Falle $d_{mn} = 1$, so ist also d_{mn} stets die Quadratsumme aus den Zahlen in (80). Aus (5), (78), (79) folgt somit durch einfache Rechnung

$$d_{mn} = d \pm 2t_{2n+1} m + u_{2n+1}^2 m^2,$$

---

[13]) C. Bodlund, Ett talproblem, Elementär Mat. **17** (1934), S. 1—4. — Zusatz bei der Korrektur: Ähnliche Beispiele befinden sich in: E. L. Ince, Cycles of reduced ideals in quadratic fields, Britisch Ass. f. the adv. of science, Math. Tables **IV** (1934), S. 75—79.

wobei das Vorzeichen des mittleren Gliedes auf der rechten Seite von m unabhängig ist. Da t_{2n+1}, u_{2n+1} für $n = 0, 1, 2, \ldots$ alle verschiedenen Lösungen von (3) durchläuft, fällt die Gesamtheit der Zahlen d_{mn} ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $n = 0, 1, 2, \ldots$) mit den Zahlen d_1 in (74) zusammen. Da außerdem (80) die Pellsche Basis von d_{mn} oder das Zahlenpaar 1, 0 ist, genügt es nach der im Teil 3 des Satzes 3 ausgedrückten Eindeutigkeit zu zeigen, daß das Zahlenpaar (80) dann und nur dann gleich A, B ist, wenn $m = 0$ oder $x_n y_n = 0, m = -2B$ ist und in den übrigen Fällen die Zahlenpaare (80) alle verschieden sind, ausgenommen den Fall, daß bei $x_n y_n = 0$ je zwei Werte m_1, m_2 mit

$$m_1, m_2 \neq 0, \quad m_1 + m_2 = -2B$$

für m eingesetzt zu demselben Zahlenpaar (80) führen, wobei auch die obige Bemerkung zu berücksichtigen ist.

Wir prüfen also vor allem, wann (80) in das Zahlenpaar A, B übergeht. Dann muß $x_n y_n m = 0$ oder $-A$ und $(x_n^2 - y_n^2)\, m = 0$ oder $-2B$ sein. Da von den Zahlen x_n und y_n wegen (77) die eine gerade und $2 \nmid A$ ist, kommt nur $x_n y_n m = 0$ in Frage. Entweder ist also $m = 0$ oder $m \neq 0$, $x_n y_n = 0$, wobei im letzteren Falle wegen $x_n^2 - y_n^2 = 1$ auch $m = -2B$ ist. Umgekehrt ist in diesen Fällen (80) offenbar gleich dem Zahlenpaar A, B. Das bisher Bewiesene stimmt also mit der Behauptung überein.

Im folgenden bezeichne ich die Zahlen, die in (80) zwischen Absolutstrichen stehen, mit a_{mn} bzw. b_{mn}, und um das übrige beweisen zu können, setze ich $a_{mn} = \pm a_{m'n'}, b_{mn} = \pm b_{m'n'}$ voraus, wobei auch m' und n' rationale bzw. nichtnegative ganze Zahlen bedeuten. Dabei soll von den schon geprüften Fällen abgesehen werden, d. h. es sei

$$|a_{mn}|, |b_{mn}| \; (= |a_{m'n'}|, |b_{m'n'}|) \neq A, B.$$

Wegen $2 | x_n y_n$ ist nach (80) $a_{mn} \equiv A \pmod 4$. Analog ist $a_{m'n'} \equiv A \pmod 4$. Da $2 \nmid A$ ist, kann von den obigen Möglichkeiten nur $a_{mn} = a_{m'n'}$ vorkommen. Wegen (80) ist also

$$x_n y_n m = x_{n'} y_{n'} m'. \tag{81}$$

Ähnlich wie (77) und (79) bestehen noch die folgenden Gleichungen:

$$(x_{n'}^2 - y_{n'}^2)\,(-1)^{n'} A - 2 x_{n'} y_{n'} (-1)^{n'} B = 1, \tag{82}$$

$$u_{2n'+1} = x_n^2 + y_n^2. \tag{83}$$

Gleichzeitig können wir die obige einschränkende Annahme offenbar folgendermaßen formulieren: es sei $m, m' \neq 0$ und im Falle $x_n y_n = x_{n'} y_{n'} = 0$ sei $m, m' \neq -2B$. Dabei wurde im letzteren Falle auch (81) berücksichtigt.

Ich unterscheide dann die folgenden beiden Fälle:

1) $b_{mn} = b_{m'n'}$. Nach (80) ist dann

$$(x_n^2 - y_n^2)\, m = (x_{n'}^2 - y_{n'}^2)\, m'. \tag{84, 1}$$

Da die mit $(-1)^n m$ bzw. $(-1)^{n'} m'$ multiplizierten linken Seiten von (77) und (82) nach (81) und (84, 1) einander gleich sind, folgt $m = \pm m'$. Dann erhalten wir aus (81) und (84, 1) leicht $x_n^2 + y_n^2 = x_{n'}^2 + y_{n'}^2$, d. h. wegen (79) und (83) $u_{2n+1} = u_{2n'+1}$. Es ist also $n = n'$ und nach (81) $m = m'$.

2) $b_{mn} = -b_{m'n'}$. Dann ist $b_{mn} + b_{m'n'} = 0$, d. h. nach (80)

$$2B + (x_n^2 - y_n^2)\, m + (x_{n'}^2 - y_{n'}^2)\, m' = 0. \tag{84, 2}$$

Aus den Gleichungen (77), (81), (82), (84, 2) folgt durch leichte Rechnung:

$$x_n y_n = -\frac{2AB + (-1)^n m + (-1)^{n'} m'}{4Bm}, \tag{85}$$

$$x_{n'} y_{n'} = -\frac{2AB + (-1)^n m + (-1)^{n'} m'}{4Bm'}, \tag{86}$$

$$x_n^2 - y_n^2 = -\frac{2AB - (-1)^n m + (-1)^{n'} m'}{2Am}, \tag{87}$$

$$x_{n'}^2 - y_{n'}^2 = -\frac{2AB + (-1)^n m - (-1)^{n'} m'}{2Am'}. \tag{88}$$

Ich betrachte zunächst den Fall $x_n y_n \neq 0$. Da von den Zahlen x_n, y_n die eine gerade ist, folgt offenbar $|x_n y_n| \geqq 2$, $|x_n^2 - y_n^2| \geqq 3$. Dasselbe gilt auch für n' statt n, da nach (81) $x_{n'} y_{n'} \neq 0$ ist.

Ist $|m| \neq |m'|$, so läßt sich ohne Einschränkung der Allgemeinheit $|m| > |m'|$ annehmen. Da die rechte Seite von (85) eine ganze Zahl ist, folgt

$$|(-1)^n m + (-1)^{n'} m'| = 2Bq,$$

wobei q positiv ganz ist. Daraus folgt $|m| > Bq$. Aus (85) und $|x_n y_n| \geqq 2$ erhalten wir $2AB + 2Bq \geqq 2|4Bm| > 8B^2 q$, d. h. $A > (4B - 1)q \geqq 4B - 1$. Jedenfalls ist also

$$A > 3B.$$

Ähnlich folgt aus (87) zunächst

$$|-(-1)^n m + (-1)^{n'} m'| = 2Ar,$$

wobei r positiv ganz ist, dann $|m| > Ar$ und wegen $|x_n^2 - y_n^2| \geqq 3$ schließlich $2AB + 2Ar \geqq 3|2Am| > 6A^2 r$, d. h. $B > (3A - 1)r \geqq 3A - 1 \geqq 2A$. Dies widerspricht der obigen Ungleichung. Es ist also nur $|m| = |m'|$ möglich.

Entweder ist also in (85) oder in (87) der Zähler gleich $2AB$. Der erstere Fall ist wegen $2 \nmid A$ offenbar unmöglich. Im zweiten Falle folgt aus (85) und (87):

$$x_n y_n = -\frac{2AB \pm 2m}{4Bm} = -\frac{AB \pm m}{2Bm}, \quad x_n^2 - y_n^2 = -\frac{2AB}{2Am} = -\frac{B}{m}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $B \mid m$ d. h. $B \leqq |m|$. Dagegen folgt aus der zweiten Gleichung $3 \leqq \frac{B}{|m|}$. Damit haben wir wieder einen Widerspruch.

Nur der Fall $x_n y_n = 0$ bleibt also übrig. Dann ist nach (81) auch $x_{n'} y_{n'} = 0$. Dann ist $n = n' = 0$ und $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Aus (84, 2) folgt also $m + m' = -2B$.

Umgekehrt ist für $x_n y_n = x_{n'} y_{n'} = 0$, $m + m' = -2B$ das Zahlenpaar (80) offenbar gleich dem zu den Werten $n = n'$, $m = m'$ gehörigen Zahlenpaar (80). Und zwar ist der gemeinsame Wert dieser Zahlenpaare A, $|B + m|$ $(= |B + m'|)$. Daraus folgt Satz 10.

Ich erwähne noch, daß der § 7 in einem gewissen Zusammenhange mit einer Arbeit von Nagell [14]) steht, worin ähnliche Darstellungen von nicht zulässigen Zahlen d vorkommen.

---

[14]) T. Nagell, Über die Lösbarkeit der Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$, Arkiv för Mat., Astr. o. Fysik **23** B/6 (1932), S. 1—5.

Schließlich nenne ich noch die folgende Umkehrung des Satzes 10: *Wenn* d *eine nicht zulässige Zahl und* t, u *eine positive Lösung von* (1) *ist, dann können unter den Zahlen* d_1 *in* (74) *für* $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *nur endlich viele zulässige Zahlen vorkommen. Ähnliches gilt sogar, wenn* d, t, u *beliebige positive ganze Zahlen sind, für die die Gleichung* (34) *besteht.*

Dies folgt einfach so: Auch jetzt besteht eine zu (75) ähnliche Gleichung, nur daß jetzt die rechte Seite $+1$ ist. Es ist also $|t + u^2 m|, u$ eine Lösung der Gleichung $x^2 - d_1 y^2 = 1$, und dieses Zahlenpaar ist sogar die Fundamentallösung der Gleichung $x^2 - d_1 y^2 = \pm 1$, wenn d_1, d. h. $|m|$ groß genug ist.

Eingegangen 12. April 1935.

Zur Theorie des syzygetischen Büschels von Kurven 3. Ordnung.

Von *E. A. Weiss* in Bonn.

Durch die Theorie des syzygetischen Büschels von Kurven 3. Ordnung werden bekanntlich drei Figuren miteinander verknüpft: Das Büschel der Kurven 3. Ordnung selbst, das völlig gleichberechtigte, invariant mit ihm verknüpfte Büschel von Kurven 3. Klasse und das System der ∞^1 Netze von Polarkegelschnitten. Wir werden zeigen, wie die Beziehungen zwischen diesen Figuren aus einer anschaulichen Grundfigur auf einfache Weise abgeleitet werden können. Daß es uns so gelingt, einem schon so häufig ausführlich untersuchten Gegenstande eine neue Seite abzugewinnen, verdanken wir einer Abbildung, welche gleichzeitig den Kurven 3. Ordnung, den Kurven 3. Klasse und den Kegelschnittnetzen Punkte zuordnet und zwar den Netzen von Polarkegelschnitten des syzygetischen Büschels die Punkte einer Raumkurve 3. Ordnung C^3, den beiden dazugehörigen Büscheln von Kurven 3. Ordnung und Klasse die Punkte zweier im Raume dieser C^3 gelegenen Geraden. Zu dieser Abbildung werden wir auf natürliche Weise geführt, indem wir die Theorie der Kurven 3. Ordnung mit der Segreschen Theorie der linearen Ebenenkomplexe im $\mathfrak{R}_5$ in Beziehung setzen. Es entspricht dann beispielsweise dem Hilbertschen Satze, nach dem zu einer Kurve 3. Ordnung zwei Netze von Autopolokoniken gehören, in der Segreschen Theorie der Satz, daß ein linearer Ebenenkomplex zwei Kernebenen besitzt.

1. Die Veronesesche Fläche als Ort von Ebenen [1]**.** Deutet man die Koeffizienten der Gleichung $\sum_{i,k}^{1,2,3} p_{ik} u_i u_k = 0$ einer Kurve 2. Klasse als Punktkoordinaten im $\mathfrak{R}_5$ [2]), so erhält man eine Abbildung

$$(1)\quad \mathfrak{P}_1 = p_{11},\ \mathfrak{P}_2 = p_{22},\ \mathfrak{P}_3 = p_{33},\ \mathfrak{P}_{1'} = 2p_{23},\ \mathfrak{P}_{2'} = 2p_{31},\ \mathfrak{P}_{3'} = 2p_{12}$$

dieser Kurven 2. Klasse auf Punkte im $\mathfrak{R}_5$, bei der bekanntlich die Kurven vom Rang 2 auf die Punkte einer $\mathfrak{M}_4^3$, die Kurven vom Range 1 auf die Punkte einer Veroneseschen Fläche $\mathfrak{M}_2^4$ abgebildet werden. Gleichzeitig werden dabei die Kurven 2. Ordnung $\sum_{i,k}^{1,2,3} a_{ik} x_i x_k = 0$ als Orte der zu ihnen apolaren Kurven 2. Klasse $-\sum_{i,k}^{1,2,3} a_{ik} p_{ik} = 0$ — auf die $\mathfrak{R}_4$ des $\mathfrak{R}_5$ abgebildet:

$$(2)\quad \mathfrak{A}_1 = a_{11},\ \mathfrak{A}_2 = a_{22},\ \mathfrak{A}_3 = a_{33},\ \mathfrak{A}_{1'} = a_{23},\ \mathfrak{A}_{2'} = a_{31},\ \mathfrak{A}_{3'} = a_{12}\,.$$

Es entsprechen schließlich den Netzen von Kegelschnitten (von Kurven 2. Klasse und Kurven 2. Ordnung) die Ebenen des $\mathfrak{R}_5$ (aufgefaßt als Orte von Punkten oder $\mathfrak{R}_4$).

---

[1]) Vgl. z. B. E. Bertini, A. Duschek, Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume. Wien, 1924, S. 387—388.

[2]) Wir bezeichnen mit $x, u, \ldots$ Elemente der Grundebene, mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{U}, \ldots$ Elemente des $\mathfrak{R}_5$ und mit $X, U, \ldots$, Elemente des R_{19}.

Zwei Systeme von je ∞^2 Ebenen sind in Bezug auf ihre Lage zur Veroneseschen Fläche ausgezeichnet: Wir wollen sie *erzeugende Ebenen* $\mathfrak{E}(u)$ und $\mathfrak{E}(x)$ der Veroneseschen Fläche nennen.

Eine Ebene $\mathfrak{E}(u)$ enthält die Bildpunkte der ∞^2 auf einer Geraden u der Ausgangsebene gelegenen Punktepaare, insbesondere die ∞^1 Doppelpunkte der Geraden und schneidet (diesen Doppelpunkten entsprechend) die Veronesesche Fläche längs eines Kegelschnittes.

Eine Ebene $\mathfrak{E}(x)$, Tangentialebene der Veroneseschen Fläche, enthält die Bildpunkte aller Punktepaare, die aus einem Punkte x der Ausgangsebene und einem beliebigen anderen Punkte dieser Ebene gebildet werden können.

Es ist auf Grund der Abbildung klar, daß zwei Ebenen $\mathfrak{E}(x)$ oder zwei Ebenen $\mathfrak{E}(u)$ sich stets in einem und nur einem Punkte schneiden, daß aber zwei Ebenen verschiedener Art im allgemeinen windschief sind und sich im Sonderfalle längs einer Geraden schneiden.

Satz 1. *Bei der Abbildung der Kurven 2. Klasse auf die Punkte des* $\mathfrak{R}_5$ *werden die Punkte* x *und die Geraden* u *der Ebene auf die erzeugenden Ebenen* $\mathfrak{E}(x)$ *und* $\mathfrak{E}(u)$ *der Veroneseschen Fläche abgebildet.*

2. Das Bild der Veroneseschen Fläche im R_{19}. Für das Folgende brauchen wir die Graßmannschen Koordinaten der Ebenen $\mathfrak{E}(u)$ und $\mathfrak{E}(x)$. Wir berechnen sie aus der Matrix der Koeffizienten von drei linear-unabhängigen, auf der Geraden u gelegenen oder zum Punkte x gehörigen Punktepaaren und erhalten:

$(3u)$

$$\begin{array}{llll}
\mathfrak{E}_{123} = +u_1u_2u_3, & \mathfrak{E}_{1'2'3'} = -4u_1u_2u_3 \\
\mathfrak{E}_{12'3'} = 0, & \mathfrak{E}_{1'23} = +u_1^3 \\
\mathfrak{E}_{23'1'} = 0, & \mathfrak{E}_{2'31} = +u_2^3 \\
\mathfrak{E}_{31'2'} = 0, & \mathfrak{E}_{3'12} = +u_3^3 \\
\mathfrak{E}_{122'} = -u_3^2u_2, & \mathfrak{E}_{1'2'2} = +2u_1^2u_3 \\
\mathfrak{E}_{133'} = +u_2^2u_3, & \mathfrak{E}_{1'3'3} = -2u_1^2u_2 \\
\mathfrak{E}_{233'} = -u_1^2u_3, & \mathfrak{E}_{2'3'3} = +2u_2^2u_1 \\
\mathfrak{E}_{211'} = +u_3^2u_1, & \mathfrak{E}_{2'1'1} = -2u_2^2u_3 \\
\mathfrak{E}_{311'} = -u_2^2u_1, & \mathfrak{E}_{3'1'1} = +2u_3^2u_2 \\
\mathfrak{E}_{322'} = +u_1^2u_2, & \mathfrak{E}_{3'2'2} = -2u_3^2u_1.
\end{array}$$

$(3x)$

$$\begin{array}{llll}
\mathfrak{E}_{123} = +x_1x_2x_3, & \mathfrak{E}_{1'2'3'} = +2x_1x_2x_3 \\
\mathfrak{E}_{12'3'} = -x_1^3, & \mathfrak{E}_{1'23} = 0 \\
\mathfrak{E}_{23'1'} = -x_2^3, & \mathfrak{E}_{2'31} = 0 \\
\mathfrak{E}_{31'2'} = -x_3^3, & \mathfrak{E}_{3'12} = 0 \\
\mathfrak{E}_{122'} = +x_1^2x_2, & \mathfrak{E}_{1'2'2} = +x_2^2x_3 \\
\mathfrak{E}_{133'} = -x_1^2x_3, & \mathfrak{E}_{1'3'3} = -x_3^2x_2 \\
\mathfrak{E}_{233'} = +x_2^2x_3, & \mathfrak{E}_{2'3'3} = +x_3^2x_1 \\
\mathfrak{E}_{211'} = -x_2^2x_1, & \mathfrak{E}_{2'1'1} = -x_1^2x_3 \\
\mathfrak{E}_{311'} = +x_3^2x_1, & \mathfrak{E}_{3'1'1} = +x_1^2x_2 \\
\mathfrak{E}_{322'} = -x_3^2x_2, & \mathfrak{E}_{3'2'2} = -x_2^2x_1.
\end{array}$$

Die Bemerkung, daß die Ebenenkoordinaten in den Koordinaten der Geraden u bzw. des Punktes x vom dritten Grade sind, ist für das Folgende grundlegend.

Deuten wir nun die 20 Ebenenkoordinaten als homogene Punktkoordinaten in einem R_{19}, so folgt:

Satz 2. *Bei der Abbildung der Ebenen des* $\mathfrak{R}_5$ *auf Punkte des* R_{19} *wird die Veronesesche Fläche als Ort ihrer erzeugenden Ebenen* $\mathfrak{E}(u)$ *und* $\mathfrak{E}(x)$ *auf die Punkte zweier Mannigfaltigkeiten* M_2^9 *abgebildet, die zwei zueinander windschiefe Räume* R_9 *aufspannen.*

Wir werden die beiden Räume und die in ihnen liegenden Mannigfaltigkeiten zur Unterscheidung mit $R_9(u)$, $R_9(x)$ und $M_2^9(u)$, $M_2^9(x)$ bezeichnen.

3. Der lineare Ebenenkomplex im R_5. Eine lineare Beziehung zwischen Ebenenkoordinaten $\mathfrak{E}_{ikl}$ wird nach $(3u)$ oder $(3x)$ die Gleichung einer ebenen Kurve 3. Klasse oder 3. Ordnung. Eine lineare Beziehung zwischen Ebenenkoordinaten definiert aber andererseits einen linearen Ebenenkomplex im $\mathfrak{R}_5$. Bevor wir diesen Zusammenhang

weiter verfolgen, müssen wir an die einfachsten Eigenschaften eines solchen Komplexes erinnern [3]).

Die Bedingung dafür, daß eine variable Ebene $\mathfrak{X}$ eine feste Ebene $\mathfrak{E}$ schneidet, die Gleichung der Ebene $\mathfrak{E}$, erhält man durch Nullsetzen der aus den Koordinaten von je drei ihrer Punkte (oder alternierenden Komplexsymbolen) gebildeten sechsreihigen Determinante:

$$(\mathfrak{E}\mathfrak{E}'\mathfrak{E}''\mathfrak{X}\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'') = 0. \tag{4}$$

Der durch die Gleichung (4) dargestellte Treffebenenkomplex der Ebene $\mathfrak{E}$ wird auch *höchstsingulärer Ebenenkomplex* genannt.

Ein *regulärer Ebenenkomplex* $\mathfrak{C}$ besitzt zwei *Kernebenen* $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$, mit deren Hilfe er sich als lineare Kombination von zwei höchstsingulären Komplexen darstellen läßt:

$$\xi_1(\mathfrak{E}\mathfrak{E}'\mathfrak{E}''\mathfrak{X}\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'') + \xi_2(\mathfrak{F}\mathfrak{F}'\mathfrak{F}''\mathfrak{X}\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'') = 0. \tag{5}$$

Für den *einfach-singulären Ebenenkomplex* fallen die beiden Kernebenen zusammen. Ein *zweifach-singulärer Ebenenkomplex* besitzt ∞^4 Paare von Kernebenen.

Die Beziehung (4) ist in den Koordinaten der beiden Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{X}$ alternierend. Deutet man die Ebenenkoordinaten als Punktkoordinaten im R_{19}, so wird daher durch die Gleichung (4) ein Nullsystem im R_{19} definiert (das *Nullsystem des* R_{19}), das zunächst dem Bildpunkte jeder Ebene $\mathfrak{E}$, dann allgemein jedem Punkte einen durch ihn hindurchlaufenden Null-R_{18} zuordnet. Aus diesem Grunde werden sowohl die Ebenen, als auch die linearen Gleichungen zwischen Ebenenkoordinaten, die linearen Ebenenkomplexe, gleichzeitig auf Punkte und R_{18} des R_{19} abgebildet, die zu einander in der Beziehung von Nullpunkt und Null-R_{18} stehen. Zwei lineare Ebenenkomplexe, deren Bildpunkte im Nullsystem des R_{19} konjugiert sind, heißen selbst *konjugiert.*

Im R_{19} sind die Bildpunkte der höchstsingulären Ebenenkomplexe (Ebenen) ausgezeichnet. Sie erfüllen eine M_9^{42}. Die oben über die Kernebenen eines regulären (einfach-singulären) Komplexes gemachte Bemerkung läßt sich in der Sprache des R_{19} auch so aussprechen: Durch den Bildpunkt eines regulären (einfach-singulären) Ebenenkomplexes im R_{19} läuft eine eindeutig bestimmte Gerade, die M_9^{42} in zwei verschiedenen (zusammenfallenden) Punkten schneidet. Wir werden diese Gerade die durch den Bildpunkt des Komplexes laufende *syzygetische Gerade* nennen.

4. Abbildung der Kurven 3. Ordnung und der Kurven 3. Klasse auf lineare Ebenenkomplexe im $\mathfrak{R}_5$. Wenn wir jetzt in der Gleichung eines linearen Ebenenkomplexes die laufenden Ebenenkoordinaten vermöge $(3u)$ oder $(3x)$ durch Geradenkoordinaten u oder Punktkoordinaten x ersetzen, erhalten wir die Gleichung einer Kurve 3. Klasse oder 3. Ordnung. Die Kurven erscheinen dabei als Orte aller Geraden u oder Punkte x, deren Bildebenen $\mathfrak{E}(u)$ oder $\mathfrak{E}(x)$ dem linearen Ebenenkomplex angehören. Während aber ein linearer Ebenenkomplex, von gleich zu besprechenden Ausnahmen abgesehen, eindeutig eine Kurve 3. Klasse und eine Kurve 3. Ordnung liefert, entsprechen umgekehrt einer vorgegebenen Kurve 3. Ordnung oder Klasse je ∞^{10} lineare Ebenenkomplexe. Über die gegenseitige Lage dieser Ebenenkomplexe geben die Gleichungen (3) Auskunft. Sie zeigen:

Satz 3. *Die Punkte des R_{10}, der einen nicht auf $R_9(x) - R_9(u)$ — gelegenen Punkt C von R_{19} mit $R_9(x) - R_9(u)$ — verbindet, stellen, von den Punkten des $R_9(x) - R_9(u)$ — selbst abgesehen, die gleiche Kurve 3. Ordnung — Kurve 3. Klasse — dar. Die Punkte von $R_9(x) - R_9(u)$ — selbst stellen keine Kurve 3. Ordnung — Kurve 3. Klasse — dar.*

[3]) Die Eigenschaften des linearen Ebenenkomplexes im $\mathfrak{R}_5$ sind im Zusammenhang mit der Abbildung der linearen Ebenenkomplexe auf die Punkte des R_{19} von *C. Segre* untersucht worden: Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni, Ann. di Mat. (3) **27** (1918), S. 75.

Um von hier aus zu einer eindeutig-umkehrbaren Abbildung zu kommen, bemerken wir, daß der durch $R_9(x)$ laufende R_{10} den Raum $R_9(u)$ in einem bestimmten Punkte schneidet, und dieser Punkt, die Projektion des Punktes C von $R_9(x)$ aus auf den $R_9(u)$, kann als Repräsentant der Kurve 3. Ordnung, ebenso die Projektion des Punktes C von $R_9(u)$ aus auf den $R_9(x)$ als Repräsentant der Kurve 3. Klasse dienen. Man kann auch sagen, daß diese Repräsentanten von der eindeutig bestimmten, durch C laufenden gemeinsamen Treffgeraden von $R_9(x)$ und $R_9(u)$ aus diesen Räumen ausgeschnitten werden.

Satz 4. *Die ebenen Kurven 3. Ordnung — 3. Klasse — werden eindeutig umkehrbar auf die Punkte des Raumes* $R_9(u)$ — $R_9(x)$ — *abgebildet.*

Diese Abbildung der Kurven 3. Ordnung (und Kurven 3. Klasse) auf Punkte des $R_9(u)$ (und $R_9(x)$) ist identisch mit der Abbildung, welche man erhält, wenn man die Koeffizienten der Gleichung einer Kurve 3. Ordnung (Kurve 3. Klasse) als homogene Punktkoordinaten deutet [4]).

Ist nun in der Ebene ein Punkt x mit einer Geraden u inzident, so schneiden sich ihre Bildebenen $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}(x)$ und $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}(u)$ im $\mathfrak{R}_5$, und es sind infolgedessen die entsprechenden Punkte im R_{19} zu einander konjugiert. Diese Tatsache findet analytisch ihren Ausdruck in der vermöge (3) bestehenden Identität

$$(\mathfrak{U}\mathfrak{U}'\mathfrak{U}''\ \mathfrak{X}\mathfrak{X}'\mathfrak{X}'') = (ux)^3. \tag{6}$$

Da es sich um eine in Ebenenkoordinaten bzw. Koordinaten von (höchstsingulären) Kurven 3. Ordnung und 3. Klasse lineare Beziehung handelt, gilt allgemein:

Satz 5. *Bei der Abbildung der Kurven 3. Ordnung und Kurven 3. Klasse auf lineare Ebenenkomplexe im* $\mathfrak{R}_5$ *wird ein Paar konjugierter (apolarer) Kurven 3. Ordnung und Klasse auf ein Paar konjugierter Ebenenkomplexe abgebildet.*

So wird dem Bildpunkte C einer Kurve 3. Ordnung im Raume $R_9(u)$ durch das Nullsystem des R_{19} ein durch C hindurchlaufender R_{18} zugeordnet, der $R_9(x)$ in einem R_8 schneidet. Dieser R_8 (der im Raume $R_9(x)$ als Bild der Kurve 3. Ordnung gelten könnte) schneidet $M_2^9(x)$ in der Kurve der Bilder aller Punkte x, die der Kurve angehören.

Betrachten wir jetzt zwei auf $M_2^9(x)$ gelegene Punkte. Ihnen entsprechen im $\mathfrak{R}_5$ zwei erzeugende Ebenen $\mathfrak{E}(x_1)$ und $\mathfrak{E}(x_2)$ gleicher Art, die infolgedessen inzident sind. Ihre Bildpunkte auf $M_2^9(x)$ sind daher zueinander konjugiert und daraus folgt allgemein, daß alle Punkte von $R_9(x)$ paarweise konjugiert sind. Der Null-R_{18} eines beliebigen Punktes von $R_9(x)$ enthält also den ganzen $R_9(x)$. Entsprechendes gilt für $R_9(u)$. Mit anderen Worten:

Satz 6. *Die Bildräume der Veroneseschen Fläche, die Räume* $R_9(x)$ *und* $R_9(u)$, *sind in dem Nullsystem des* R_{19} *„vollständige Räume“.*

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich jetzt die Sonderstellung der den Punkten von $R_9(x)$ und $R_9(u)$ entsprechenden linearen Ebenenkomplexe der Veroneseschen Fläche gegenüber geometrisch deuten:

Satz 7. *Zu einer Veroneseschen Fläche gehören, den Punkten von* $R_9(x)$ *und* $R_9(u)$ *entsprechend, zwei lineare Systeme von je* ∞^9 *„erzeugenden“ linearen Ebenenkomplexen, die entweder alle erzeugenden Ebenen* $\mathfrak{E}(x)$ *oder alle erzeugenden Ebenen* $\mathfrak{E}(u)$ *der Veroneseschen Fläche enthalten. Die Komplexe eines Systems sind paarweise konjugiert.*

Unter Benutzung dieses Resultats läßt sich der Inhalt des Satzes 3 auch so aussprechen:

---

[4]) Sie ist von N. Spampinato, untersucht worden: Geometria delle cubiche piane, Atti. Acc. Gioenia (5) **13** (1921/22), Memoria V. Die Ergebnisse dieser Arbeit werden im folgenden nicht benötigt.

Satz 8. *Im Raume einer Veroneseschen Fläche gehört zu jedem linearen Ebenenkomplex* $\mathfrak{C}$, *der nicht selbst erzeugender Komplex ist, je ein erzeugender Komplex der beiden verschiedenen Arten. Diese erzeugenden Komplexe schneiden das System der erzeugenden Ebenen* $\mathfrak{E}(u)$ *bzw.* $\mathfrak{E}(x)$ *der Veroneseschen Fläche in derselben Ebenenmannigfaltigkeit wie* $\mathfrak{C}$.

5. Die Autopolokoniken einer Kurve 3. Ordnung. Nach D. Hilbert [5]) gehören zu jeder Kurve 3. Ordnung $(ax)^3 = 0$ zwei Netze von Autopolokoniken. Sie sind folgendermaßen definiert: Ein Punkt y hat in bezug auf die vorgegebene Kurve den Polarkegelschnitt $(ax)^2(ay) = 0$, in Geradenkoordinaten $\frac{1}{2}(aa'u)^2(ay)(a'y) = 0$. Man sucht nun den Ort aller Punkte y, deren Polarkegelschnitte (als Geradenort) zu einer Kurve 2. Ordnung $(cx)^2 = 0$ apolar sind: $\frac{1}{2}(aa'c)^2(ay)(a'y) \equiv (c^*y)^2 = 0$. Der Kegelschnitt $(c^*x)^2 = 0$ wird *Polokonik* von $(cx)^2 = 0$ genannt, und die involutorische Transformation, die jeder Kurve 2. Ordnung $(cx)^2 = 0$ eine neue Kurve 2. Ordnung $(c^*x)^2 = 0$ zuordnet, heißt die mit der Kurve 3. Ordnung verbundene *Polokonikentransformation.* Ihre Ruheelemente heißen *Autopolokoniken.*

Zu einer Kurve 3. Ordnung gehören zwei Netze von Autopolokoniken. Sie werden im $\mathfrak{R}_5$ auf zwei Ebenen abgebildet, und der Polokonikentransformation entspricht bei dieser Abbildung die involutorische Kollineation mit diesen beiden Ebenen als Inzidenzgebieten. So weit ist die Abbildung von G. Manfredini [6]) untersucht worden.

Wir behaupten jetzt:

Satz 9. *Eine reguläre Kurve 3. Ordnung sei auf einen Erzeugungskomplex der Veroneseschen Fläche abgebildet. Dann sind die Kernebenen des Komplexes die Bildebenen der Autopolokonikennetze der Kurve 3. Ordnung.*

Den Beweis führen wir analytisch, indem wir von der Hesseschen Normalform

$$(7) \qquad (ax)^3 \equiv \xi_1(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6\xi_2 x_1 x_2 x_3 = 0$$

der Kurve 3. Ordnung ausgehen. Aus der Identität

$$(8) \quad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}(aa'c)^2(ay)(a'y) &\equiv -(\xi_2^2 c_{11} + 2\xi_1\xi_2 c_{23})y_1^2 + (\xi_1^2 c_{11} + 2\xi_2^2 c_{23})y_2 y_3 + * + * \\ &\equiv \varrho\{c_{11}y_1^2 + 2c_{23}y_2y_3 + * + *\} \end{aligned}$$

bestimmt sich zunächst ϱ^2 zu

$$(9) \qquad \varrho^2 = \xi_2(\xi_2^3 - \xi_1^3).$$

ϱ^2 ist mit der Invariante S der Kurve 3. Ordnung identisch, deren Verschwinden besagt, daß die Kurve äquianharmonisch ist. Wir setzen zunächst $\varrho^2 \neq 0$ voraus. Jedem der beiden verschiedenen Werte von ϱ entspricht dann ein Netz von Autopolokoniken, deren Koeffizienten den Gleichungen

$$(10) \qquad \begin{aligned} (\varrho + \xi_2^2)c_{11} + 2\xi_1\xi_2 c_{23} &= 0, \\ (\varrho + \xi_2^2)c_{22} + 2\xi_1\xi_2 c_{31} &= 0, \\ (\varrho + \xi_2^2)c_{33} + 2\xi_1\xi_2 c_{12} &= 0 \end{aligned}$$

genügen. Deutet man in ihnen die c_{ik} als $\mathfrak{R}_4$-Koordinaten im $\mathfrak{R}_5$, so stellen sie die gesuchten Bildebenen der Autopolokonikennetze dar. Die (aus Punktkoordinaten gebildeten „Strahlen-")Koordinaten dieser Ebenen werden:

$$(11) \qquad \begin{gathered} \mathfrak{E}_{123} = (\varrho + \xi_2^2)^3, \qquad \mathfrak{E}_{1'2'3'} = 8\xi_1^3\xi_2^3, \\ \mathfrak{E}_{12'3'} = \mathfrak{E}_{23'1'} = \mathfrak{E}_{31'2'} = (\varrho + \xi_2^2)\,4\xi_1^2\xi_2^2, \qquad \mathfrak{E}_{1'23} = \mathfrak{E}_{2'31} = \mathfrak{E}_{3'12} = 2\xi_1\xi_2(\varrho + \xi_2^2)^2, \\ \text{alle anderen } \mathfrak{E}_{ikl} = 0. \text{ [7])} \end{gathered}$$

---

[5]) D. Hilbert, Lettre adressée à M. Hermite, J. Math. pures et appl. (4) **4** (1888), S. 249—256 = Werke II, Berlin (1933), S. 148—153.

[6]) G. Manfredini, Sui quadrangoli coniugati a una cubica, Giornale di Mat. **39** (1901), S. 145—161.

[7]) Diesen Zusatz lassen wir im folgenden fort.

Diese Koordinaten sind zugleich die Koordinaten der Bildpunkte $K(+\varrho)$, $K(-\varrho)$ der beiden Ebenen im R_{19}. Wir verbinden diese Punkte und bilden

$$(12) \qquad (-\varrho+\xi_2^2)\,K(+\varrho)-(+\varrho+\xi_2^2)\,K(-\varrho).$$

Dann erhalten wir den im Raume $R_9(u)$ gelegenen Punkt C:

$$(13) \qquad \begin{gathered} \mathfrak{C}_{123}=\xi_2, \qquad \mathfrak{C}_{1'2'3'}=-4\xi_2, \\ \mathfrak{C}_{12'3'}=\mathfrak{C}_{23'1'}=\mathfrak{C}_{31'2'}=0\,, \quad \mathfrak{C}_{1'23}=\mathfrak{C}_{2'31}=\mathfrak{C}_{3'12}=\xi_1. \end{gathered}$$

Es ist der Bildpunkt der Kurve 3. Ordnung (7).

Da $K(+\varrho)$ und $K(-\varrho)$ Bildpunkte höchstsingulärer Komplexe sind, ist ihre Verbindungslinie die durch $\mathfrak{C}$ laufende syzygetische Gerade, w. z. b. w.

Im Falle $\varrho^2=0$ fallen die beiden Kernebenen zusammen:

Satz 10. *Die äquianharmonischen Kurven 3. Ordnung werden auf einfachsinguläre erzeugende Komplexe der Veroneseschen Fläche abgebildet.*

Die syzygetische Gerade des Punktes C schneidet trivialerweise den Raum $R_9(u)$. Wir fragen jetzt danach, unter welchen Umständen sie auch den Raum $R_9(x)$ schneidet. Wir bilden, um das Verschwinden der Koordinaten $\mathfrak{E}_{1'23}$, $\mathfrak{E}_{2'31}$, $\mathfrak{E}_{3'12}$ zu erreichen,

$$(14) \qquad (-\varrho+\xi_2^2)^2\,K(+\varrho)-(+\varrho+\xi_2^2)^2\,K(-\varrho)$$

und erhalten:

$$(15) \qquad \begin{gathered} \mathfrak{E}_{123}=\xi_1^4\,, \qquad \mathfrak{E}_{1'2'3'}=-16\xi_1\xi_2^3, \\ \mathfrak{E}_{12'3'}=\mathfrak{E}_{23'1'}=\mathfrak{E}_{31'2'}=-4\xi_1^3\xi_2, \quad \mathfrak{E}_{1'23}=\mathfrak{E}_{2'31}=\mathfrak{E}_{3'12}=0. \end{gathered}$$

Soll dieser Punkt in $R_9(x)$ liegen, so muß noch die Gleichung

$$(16) \qquad 2\mathfrak{E}_{123}-\mathfrak{E}_{1'2'3'}=2\xi_1(\xi_1^3+8\xi_2^3)=0$$

erfüllt sein. In diesem Falle ist aber die Kurve 3. Ordnung ein Dreiseit. Also:

Satz 11. *Die durch einen Punkt C von $R_9(u)$ laufende syzygetische Gerade schneidet den Raum $R_9(x)$ dann und nur dann, wenn C der Bildpunkt eines Dreiseits ist. Sie schneidet dann im Bildpunkte des zu dem Dreiseit gehörigen Dreiecks. Die beiden durch die syzygetische Gerade bestimmten Kegelschnittnetze sind in diesem Falle das Netz der dem Dreieck umbeschriebenen Kurven 2. Ordnung und das Netz der dem Dreiseit einbeschriebenen Kurven 2. Klasse (und die polaren Netze).*

6. Projektion der syzygetischen Geraden auf $R_9(x)$ und $R_9(u)$. Das Bild der Cayleyschen und der Hesseschen Kurve. Wir projizieren jetzt die durch den Bildpunkt C einer regulären Kurve 3. Ordnung laufende syzygetische Gerade einerseits von $R_9(u)$ aus auf den $R_9(x)$ und andererseits von $R_9(x)$ aus auf den $R_9(u)$.

Die Projektion von $R_9(u)$ aus liefert im $R_9(x)$ nur einen Punkt:

$$(17) \qquad \begin{gathered} \mathfrak{E}_{123}=\xi_1^3-4\xi_2^3, \qquad \mathfrak{E}_{1'2'3'}=2(\xi_1^3-4\xi_2^3), \\ \mathfrak{E}_{12'3'}=\mathfrak{E}_{23'1'}=\mathfrak{E}_{31'2'}=-6\xi_1^2\xi_2\,, \qquad \mathfrak{E}_{1'23}=\mathfrak{E}_{2'31}=\mathfrak{E}_{3'12}=0, \end{gathered}$$

den Bildpunkt der Kurve 3. Klasse:

$$(18) \qquad -6(\xi_1^3-4\xi_2^3)u_1u_2u_3-6\xi_1^2\xi_2(u_1^3+u_2^3+u_3^3)=0.$$

(18) ist die Gleichung der zur Kurve (7) gehörigen *Cayleyschen Kurve.*

Die Projektion der syzygetischen Geraden von $R_9(x)$ aus liefert im $R_9(u)$ eine durch den Punkt C hindurchlaufende Gerade, die durch die Projektion eines beliebigen von C verschiedenen Punktes der Geraden festgelegt wird. Man erhält als Projektionen der Punkte $K(+\varrho)$ und $K(-\varrho)$ die Bildpunkte zweier Kurven des zur Ausgangskurve gehörigen syzygetischen Büschels. So folgt:

Satz 12. *Eine reguläre Kurve 3. Ordnung c^3 sei auf einen Punkt C des Raumes $R_9(u)$ abgebildet. Dann gibt die Projektion der durch C hindurchlaufenden syzygetischen*

Geraden von $R_9(u)$ aus auf $R_9(x)$ das Bild der Cayleyschen Kurve von c^3, die Projektion von $R_9(x)$ aus auf $R_9(u)$ die Bildgerade des durch c^3 bestimmten syzygetischen Kurvenbüschels.

Für den vom Standpunkte der Geometrie im R_{19} aus sehr einfachen Zusammenhang zwischen den Punkten K und ihren Projektionen auf $R_9(u)$ haben wir in der Ebene bisher noch keine geometrische Deutung angegeben. Wir fragen deshalb allgemein (ein Spezialfall wurde durch Satz 11 erledigt): Welcher Zusammenhang besteht zwischen den durch einen Punkt P von R_{19} dargestellten Kegelschnittnetzen einerseits und den Kurven 3. Ordnung und 3. Klasse andererseits, die den Projektionen des Punktes P auf $R_9(u)$ und $R_9(x)$ entsprechen?

Wir gehen von der Kurve (7) aus, stellen das Netz der Polarkegelschnitte her, bilden es auf eine Ebene von $\mathfrak{R}_5$ ab, suchen die Ebenenkoordinaten:

$$(19)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{E}_{123} &= \xi_2^3\ , & \mathfrak{E}_{1'2'3'} &= -\xi_1^3\ , \\ \mathfrak{E}_{12'3'} = \mathfrak{E}_{23'1'} = \mathfrak{E}_{31'2'} &= \xi_1^2\xi_2, & \mathfrak{E}_{1'23} = \mathfrak{E}_{2'31} = \mathfrak{E}_{3'12} &= -\xi_1\xi_2^2 \end{aligned}$$

und deuten sie als Koordinaten eines Punktes P im R_{19}. Die Projektion des Punktes P von $R_9(x)$ aus auf den $R_9(u)$:

$$(20)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{E}_{123} &= \xi_1^3 + 2\xi_2^3, & \mathfrak{E}_{1'2'3'} &= -4(\xi_1^3 + 2\xi_2^3), \\ \mathfrak{E}_{12'3'} = \mathfrak{E}_{23'1'} = \mathfrak{E}_{31'2'} &= 0\ , & \mathfrak{E}_{1'23} = \mathfrak{E}_{2'31} = \mathfrak{E}_{3'12} &= -6\xi_1\xi_2^2 \end{aligned}$$

liefert den Bildpunkt der Kurve 3. Ordnung

$$(21)\qquad 6\xi_1\xi_2^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 6(\xi_1^3 + 2\xi_2^3)x_1x_2x_3 = 0.$$

Es handelt sich um die *Hessesche Kurve* der Kurve (7). Der Projektionsstrahl schneidet, wie man ebenso einsieht, $R_9(x)$ im Bildpunkte der Cayleyschen Kurve von (7). Daher:

Satz 13. *P sei der Bildpunkt des Polarkegelschnittnetzes einer Kurve 3. Ordnung c^3. Dann schneidet die durch P laufende gemeinsame Treffgerade von $R_9(x)$ und $R_9(u)$ diese beiden Räume in den Bildpunkten der Cayleyschen und der Hesseschen Kurve von c^3.*

Man würde hiernach den Bildpunkt der Hesseschen Kurve einer durch ihren Bildpunkt C im $R_9(u)$ vorgegebenen Kurve 3. Ordnung angeben können, wenn man zu dieser Kurve den Bildpunkt des Polarkegelschnittnetzes konstruieren könnte. Mit dieser Konstruktion beschäftigen wir uns u. a. in den beiden nächsten Nummern.

7. Das Bild eines syzygetischen Büschels von Kurven 3. Ordnung. Lassen wir in den Gleichungen (13), (17) und (19) den binären Parameter ξ variieren, so geben sie nacheinander die Parameterdarstellungen einer in $R_9(u)$ bzw. in $R_9(x)$ gelegenen Geraden und einer in dem von diesen beiden Geraden aufgespannten R_3 gelegenen kubischen Raumkurve C^3. So ergibt sich der Hauptsatz unserer Abbildung:

Satz 14. *Durch die Abbildung der Kurven 3. Ordnung, der Kurven 3. Klasse und der Kegelschnittnetze auf Punkte des R_{19} wird ein syzygetisches Büschel von Kurven 3. Ordnung auf eine Gerade $G(u)$ von $R_9(u)$ (die nach Satz 12 konstruiert werden kann), das mit ihm invariant verbundene Büschel von Kurven 3. Klasse auf eine Gerade $G(x)$ von $R_9(x)$ (die ebenfalls nach Satz 12 konstruiert werden kann) und das System der Polarkegelschnittnetze dieser Kurven auf die Punkte einer rationalen kubischen Raumkurve C^3 abgebildet, die in dem von den beiden Geraden aufgespannten R_3 verläuft.*

Unsere nächste Aufgabe wird es sein, die Lage der beiden Geraden zu der kubischen Raumkurve zu bestimmen. Da die durch einen Punkt C von $G(u)$ laufende syzygetische Gerade eindeutig bestimmt ist und da andererseits die durch den Punkt C laufende Sehne der C^3 zwei höchstsingulären Ebenenkomplexen entsprechende Punkte (die Treffpunkte mit der C^3) enthält, gilt zunächst:

Satz 15. *Die durch einen Punkt C von $G(u)$ laufende syzygetische Gerade ist mit der durch diesen Punkt laufenden Sehne der C^3 identisch.*

Es ist nun bekannt, daß eine Gerade von vier Tangenten einer C^3 getroffen wird. Nach Satz 10 sind die Punkte von $G(u)$, von denen diese Tangenten ausgehen, die Bildpunkte der vier äquianharmonischen Kurven des syzygetischen Büschels. Deren Parameter genügen aber der Gleichung

$$\varrho^2 \equiv \xi_2(\xi_2^3 - \xi_1^3) = 0. \qquad \text{(Vgl. (9).)} \tag{22}$$

Sie bilden also ein äquianharmonisches Quadrupel. Nach einem bekannten Satze aus der Theorie der kubischen Raumkurven bilden dann auch die Parameter der Berührungspunkte auf der C^3 ein äquianharmonisches Quadrupel und die Gerade gehört dem durch die kubische Raumkurve bestimmten linearen Geradenkomplex an. Entsprechendes gilt für $G(x)$:

Satz 16. *Die Geraden $G(u)$ und $G(x)$ gehören dem mit der kubischen Raumkurve verbundenen linearen Komplex an.*

Die Parameter der Berührungspunkte erhalten wir, indem wir die Raumkurve als Ort von Tangenten darstellen und die Bedingung dafür suchen, daß eine Kurventangente die Gerade $G(u)$ schneidet. Wir finden:

$$\xi_1(\xi_1^3 + 8\xi_2^3) = 0 \tag{23}$$

und damit:

Satz 17. *Die durch den Bildpunkt einer äquianharmonischen Kurve des syzygetischen Büschels laufende syzygetische Gerade berührt die C^3 in dem Bildpunkt des Netzes der Polarkurven 2. Ordnung eines zum syzygetischen Büschel gehörigen Dreiseits. Dieses Netz wird doppelt-zählend Autopolokonikennetz der Kurve.*

Nach Satz 2 ist die durch den Bildpunkt eines Dreiseits laufende syzygetische Gerade gleichzeitig Treffgerade des Raumes $R_9(x)$. Die durch den Bildpunkt eines Dreiseits unseres syzygetischen Büschels laufende syzygetische Gerade schneidet also die Gerade $G(x)$. Daher:

Satz 18. *Die kubische Raumkurve besitzt vier Sehnen, welche gleichzeitig Trefflinien der Geraden $G(u)$ und $G(x)$ sind. Ihre Schnittpunkte mit $G(u)$, $G(x)$ und C^3 stellen die Dreiseite des syzygetischen Büschels, die dazugehörigen Dreiecke und Netze von Polarkegelschnitten dar.*

Die geometrische Bedeutung von vier der acht Sehnenschnittpunkte ist in Satz 17 angegeben worden. Die vier übrigen Punkte stellen die Netze von Polarkurven 2. Klasse der im Klassenbüschel enthaltenen Dreiecke dar. Die Tangenten in diesen Punkten schneiden die Gerade $G(x)$ in den Bildpunkten der vier äquianharmonischen Kurven des Klassenbüschels.

Hiermit ist die symmetrische Beziehung zwischen Ordnungs- und Klassenbüschel durch die symmetrische Lage der Geraden $G(u)$ und $G(x)$ zur kubischen Raumkurve zum Ausdruck gebracht. Wir fügen noch hinzu:

Satz 19. *Die Netze der Polarkurven 2. Ordnung der vier Dreiseite des Ordnungsbüschels und die Netze der Polarkurven 2. Klasse der vier Dreiecke des Klassenbüschels werden auf der C^3 durch zwei äquianharmonische Punktquadrupel dargestellt, von denen jedes das Hessesche Quadrupel des anderen ist.*

8. Beziehungen zwischen Ordnungsbüschel, Klassenbüschel und Polarkegelschnittnetzen. Um die Anwendung der in der vorigen Nummer besprochenen Bildfigur vorzubereiten, zeigen wir zunächst in einer Übersicht, wie man von dem Bildpunkte C einer Kurve 3. Ordnung ausgehend die Bildpunkte der mit dieser Kurve invariant verbundenen Figuren finden kann:

Punkt C der Geraden $G(u)$	Kurve 3. Ordnung c^3 des syzygetischen Büschels.
Schnittpunkte der durch C laufenden Sehne der C^3 mit der C^3	Netze der Autopolokoniken von c^3. (Satz 9, Satz 15.)
3. Schnittpunkt P der Verbindungsebene dieser Sehne und der Geraden $G(u)$ mit der C^3	Netz der Polarkegelschnitte von c^3. (Beweis folgt.)
Schnitt dieser Verbindungsebene mit der Geraden $G(x)$ = Schnittpunkt der durch P laufenden gemeinsamen Treffgeraden von $G(u)$ und $G(x)$ mit $G(x)$	Cayleysche Kurve von c^3. (Satz 13.)
Schnittpunkt dieser gemeinsamen Treffgeraden mit $G(u)$	Hessesche Kurve von c^3. (Satz 13.)
Verbindungsebene der gemeinsamen Treffgeraden mit $G(x)$ schneidet die C^3 in zwei weiteren Punkten	Netze der Autopolokoniken der zu c^3 doppelt-apolaren Kurve 3. Klasse. (Satz 9, Satz 15.)
Die Verbindungslinie dieser Punkte schneidet $G(x)$ in einem Punkte	Zu c^3 doppelt apolare Kurve 3. Klasse. (Beweis folgt.)

Zwei in dieser Übersicht aufgestellte Behauptungen sind noch zu beweisen. Wir haben erstens zu zeigen, daß die Verbindungsebene des Bildpunktes des zu einer Kurve 3. Ordnung gehörigen Netzes von Polarkegelschnitten mit den Bildpunkten der zu dieser Kurve gehörigen Netze von Autopolokoniken durch die Gerade $G(u)$ läuft. Diese Tatsache ergibt sich daraus, daß die vier Punkte (11), (19) und (20) linear abhängig sind.

Es ist zweitens zu zeigen, daß die in der Übersicht zuletzt genannte Kurve 3. Klasse die zu c^3 doppelt-apolare Kurve ist. Diese Kurve hat aber als Netz ihrer Polarkurven 2. Klasse das zum Netz der Polarkurven 2. Ordnung der Kurve c^3 apolare Netz: Beide Netze werden in der Tat im R_{19} durch ein- und denselben Punkt P, im $\mathfrak{R}_5$ also durch ein- und dieselbe Ebene dargestellt, w. z. b. w.

Mit Hilfe unserer Übersicht ist es jetzt möglich, an der Bildfigur die Beziehungen abzulesen, die zwischen den Kurven des syzygetischen Büschels und den invariant mit ihnen verbundenen Kurven 3. Ordnung, 3. Klasse und Kegelschnittnetzen bestehen. Wir geben zwei Beispiele:

Eine vorgegebene Kurve h^3 des syzygetischen Büschels ist die Hessesche Kurve von drei Kurven des syzygetischen Büschels. In der Tat: Durch den Bildpunkt von h^3 laufen drei gemeinsame Treffgeraden der C^3 und der Geraden $G(x)$. Diese liefern, mit $G(u)$ verbunden, drei Ebenen, von denen jede die C^3 (abgesehen von dem Schnittpunkte mit der gemeinsamen Treffgeraden) in zwei weiteren Punkten trifft. Die drei Verbindungslinien von je zwei zusammengehörigen Punkten schneiden die Gerade $G(u)$ in den Bildpunkten der gesuchten Kurven, w. z. b. w.

Ebenso leicht liest man den bekannten Satz ab:

Satz 20. *Die Kurve 3. Ordnung c^3 sei zu der Kurve 3. Klasse d^3 doppelt apolar. Dann ist die Hessesche Kurve von d^3 die Cayleysche Kurve von c^3.*

9. Die harmonischen Kurven des syzygetischen Büschels. Die C^3 der Bildfigur ist das Bild der ∞^1 Ebenen einer $\mathfrak{M}_3^3$ des $\mathfrak{R}_5$, die etwa als Erzeugnis von drei projektiv aufeinander bezogenen Geraden des $\mathfrak{R}_5$ gewonnen werden kann. Durch zwei Punkte der C^3 wird nun auf der C^3 eine Involution festgelegt, welche die vorgegebenen Punkte zu

Ruhepunkten hat. Dieser Verwandtschaft entspricht im $\mathfrak{R}_5$ die Involution des binären Gebietes der ∞^1 erzeugenden Ebenen von $\mathfrak{M}_3^3$ mit den Bildebenen der beiden vorgegebenen Punkte als Ruheelementen oder, was dasselbe ist, die involutorische Kollineation mit diesen beiden Ebenen als Inzidenzgebieten. Werden nun die auf C^3 ausgezeichneten Punkte von der syzygetischen Geraden des der Kurve 3. Ordnung c^3 entsprechenden Bildpunktes ausgeschnitten, so werden die Ruheebenen die Bildebenen der Autopolokonikennetze von c^3, und wir haben:

Satz 21. *Die syzygetische Gerade durch den Bildpunkt C einer regulären Kurve 3. Ordnung c^3 schneide die C^3 der Bildfigur in den Punkten Q und Q'. Dann ist die auf der C^3 durch die Punkte Q und Q' bestimmte Involution das Bild der mit der Kurve 3. Ordnung c^3 verbundenen Polokonikentransformation.*

Die Polokonikentransformation transformiert das Netz der Polarkegelschnitte einer Kurve c^3 des syzygetischen Büschels in das Netz der Polarkegelschnitte einer anderen Kurve des syzygetischen Büschels. In welcher Beziehung stehen zwei in dieser Weise involutorisch gepaarte Kurven des Büschels? Wir untersuchen die Frage analytisch.

Die Schnittpunkte der durch den Bildpunkt C der Kurve (7) laufenden syzygetischen Geraden mit der Kurve C^3 haben auf der C^3 (19) als Parameter die Nullstellen der binären quadratischen Form

$$4\xi_1\xi_2\zeta_2^2 + 4\xi_2^2\zeta_1\zeta_2 + \xi_1^2\zeta_1^2. \tag{24}$$

(Diese Gleichung vermittelt eine Abbildung der Kurven des syzygetischen Büschels auf binäre quadratische Formen, die wir hier aber nicht weiter verfolgen.[8]) Wir polarisieren diese Form und suchen den Pol von ξ:

$$\zeta_1 = -6\xi_1\xi_2^2, \quad \zeta_2 = \xi_1^3 + 2\xi_2^3. \tag{25}$$

ζ ist der Parameter der zur Kurve ξ gehörigen Hesseschen Kurve (vgl. (21)).

Satz 22. *Unterwirft man das Netz der Polarkegelschnitte einer regulären Kurve 3. Ordnung c^3 der mit c^3 verbundenen Polokonikentransformation, so erhält man das Netz der Polarkegelschnitte der Hesseschen Kurve von c^3* (G. Manfredini, a. a. O., S. 152).

Die Beziehung zwischen einer vorgegebenen Kurve c^3 und ihrer Hesseschen Kurve wird nun bekanntlich symmetrisch, wenn die vorgegebene Kurve c^3 harmonisch ist. In diesem Falle ist daher das Polarkegelschnittnetz der Kurve c^3 identisch mit einem der beiden Kegelschnittnetze, die bei dem Produkt der Polokonikentransformation von c^3 mit der Polokonikentransformation der Hesseschen Kurve von c^3 in Ruhe bleiben (G. Manfredini, a. a. O., S. 153). Daher:

Satz 23. *Jede von zwei zusammengehörigen der $3 \cdot 2$ harmonischen Kurven des syzygetischen Büschels bestimmt je ein Paar von Autopolokonikennetzen. Das gemeinsame harmonische Paar stellt das Paar der Polarkegelschnittnetze der harmonischen Kurven dar.*

10. Die Sätze von H. S. White. Die wichtigsten Beziehungen zwischen Autopolokoniken und Polarkegelschnitten sind von H. S. White angegeben worden[9]). Wir können sie ohne Rechnung unserer Bildfigur entnehmen:

---

[8]) E. A. Weiss, Das syzygetische Büschel von Kurven 3. Ordnung und die Figur von drei konjugierten Kegelschnitten, Mathematica **11** (1935).

[9]) H. S. White, Conics and cubics connected with a plane cubic by certain covariant relations, Trans. Am. Math. Soc. **1** (1900), S. 1—8. An diese Arbeit anschließend Noten von P. Gordan, Formentheoretische Entwicklung der in Herrn Whites Abhandlung über Kurven 3. Ordnung enthaltenen Sätze, ebenda S. 9—13, und: Die Hessesche und die Cayleysche Kurve, ebenda S. 402—413. — Vgl. H. S. White, Plane curves of the third order, Cambridge (Mass.) 1925, Kap. 10.

Zu jeder Kurve 3. Ordnung c^3 des syzygetischen Büschels gehören zwei andere Kurven dieses Büschels, deren Polarkegelschnitte die Autopolokoniken der c^3 sind. (White, S. 3.)

Das Netz der Polarkegelschnitte von c^3 ist eines der Autopolokonikennetze einer jeden der beiden neu gewonnenen Kurven. (White, S. 3.)

Die drei Kurven bilden ein symmetrisches System: Jedes Paar von Autopolokonikennetzen der einen ist das Paar der Polarkegelschnittnetze der beiden anderen. (White, S. 3.)

Die drei Kurven des Tripels sind dadurch charakterisiert, daß sie eine gemeinsame Cayleysche Kurve haben. (White, S. 4.)

Die Netze der Autopolokoniken einer Kurve 3. Ordnung c^3 sind apolar zu Netzen von Polarkurven 2. Klasse von zwei Kurven 3. Klasse d_1^3 und d_2^3, welche dieselbe Hessesche Kurve d^3 haben, wie die zu c^3 zweifach apolare Kurve 3. Klasse (nämlich, nach Satz 20 die Cayleysche Kurve von c^3). (White, S. 5.)

Die Verbindungsebene von $G(u)$ mit der syzygetischen Geraden eines Punktes C von $G(u)$ schneidet die kubische Raumkurve C^3 in drei Punkten. Die von der syzygetischen Geraden verschiedenen Seiten des so bestimmten Dreiecks schneiden $G(u)$ in zwei dem Punkte C zugeordneten Punkten.

Die syzygetischen Geraden der beiden neugewonnenen Punkte laufen durch den Punkt C.

Die drei Punkte der C^3 — Schnittpunkte der C^3 mit einer durch $G(u)$ laufenden Ebene — sind gleichberechtigt.

Die durch $G(u)$ laufende Ebene schneidet $G(x)$ in einem Punkte.

Die syzygetische Gerade eines Punktes C von $G(u)$ schneide C^3 in E_1 und E_2, und ihre Verbindungsebene mit $G(u)$ schneide die Gerade $G(x)$ im Punkte D. Dann schneiden die durch E_1 und E_2 laufenden gemeinsamen Treffgeraden von $G(u)$ und $G(x)$ die Gerade $G(u)$ im Punkte D. (Aus dieser Tatsache folgt nach Satz 13 die zu beweisende Beziehung.)

Eingegangen 2. Mai 1935.

Die Autopolokoniken der singulären Kurven 3. Ordnung.

Von *E. A. Weiss* in Bonn.

In einer Arbeit von H. S. White[1]) werden die Autopolokonikennetze der Kurven 3. Ordnung eines syzygetischen Büschels untersucht. Für die dort bewiesenen Resultate ergab sich in einer früheren Arbeit[2]) eine neue, anschauliche Ableitung dadurch, daß eine Abbildung zugrunde gelegt wurde, die gleichzeitig Kurven 3. Ordnung, Kurven 3. Klasse und Kegelschnittnetzen Punkte eines R_{19} zuordnete. Den drei genannten Figuren entsprechen nämlich bei der bekannten Abbildung der Kurven 2. Klasse einer Ebene auf die Punkte eines $\Re_5$ lineare Ebenenkomplexe und diese können wiederum auf Punkte eines R_{19} abgebildet werden.

Die Untersuchungen von H. S. White beziehen sich nur auf den Fall des syzygetischen Büschels einer regulären Kurve 3. Ordnung. Für die singulären Kurven sind die wesentlichen Formeln ohne Formulierung entsprechender Sätze in Tabellenform von P. Gordan zusammengestellt worden[3]). Es ist die Absicht der vorliegenden Arbeit, die oben genannte Abbildung weiter zu verfolgen, mit ihrer Hilfe die Ausartungen der Sätze von H. S. White für singuläre Kurven 3. Ordnung zu untersuchen und festzustellen, wie sich bei unserer Zuordnung die verschiedenen Arten von Kurven 3. Ordnung auf die verschiedenen Arten von linearen Ebenenkomplexen verteilen.

1. Die Autopolokonikennetze der Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt. Das syzygetische Büschel einer Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt nehmen wir in der Normalform

$$(1) \qquad (ax)^3 \equiv \xi_1(x_2^3 + x_3^3) + 6\xi_2 x_1 x_2 x_3 = 0$$

an. Für $\xi_1 = 0$ wird ein Dreiseit, für $\xi_2 = 0$ ein „Geradentripel" (Figur von drei durch einen Punkt laufenden Geraden) geliefert. Die Bedingung

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2}(aa'c)^2(ay)(a'y) \equiv \varrho(cy)^2 \qquad \{y\}$$

dafür, daß $(cy)^2 = 0$ eine Autopolokonik von (1) ist, faßt die folgenden sechs Gleichungen zusammen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \varrho c_{11} &= -\xi_2^2 c_{11} \quad * \quad , & 2\varrho c_{23} &= +\xi_1^2 c_{11} + 2\xi_2^2 c_{23}, \\ \varrho c_{22} &= -\xi_2^2 c_{22} - 2\xi_1\xi_2 c_{31}, & 2\varrho c_{31} &= \quad * \quad 2\xi_2^2 c_{31}, \\ \varrho c_{33} &= -\xi_2^2 c_{33} - 2\xi_1\xi_2 c_{12}, & 2\varrho c_{12} &= \quad * \quad 2\xi_2^2 c_{12}. \end{aligned}$$

[1]) H. S. White, Conics and cubics connected with a plane cubic by certain covariant relations, Trans. Am. Math. Soc. **1** (1900), S. 1—8.

[2]) E. A. Weiss, Zur Theorie des syzygetischen Büschels von Kurven 3. Ordnung, Crelles J. **173** (1935), S. 222.

[3]) P. Gordan, Die Hessesche und die Cayleysche Kurve, Trans. Am. Math. Soc. **1** (1900), S. 402—413.

Diese können — $\xi_2 \neq 0$ vorausgesetzt — auf zweierlei Weise erfüllt werden:

$$\text{(4)} \qquad \text{I:} \quad \varrho = -\xi_2^2, \quad c_{31} = 0, \quad c_{12} = 0, \; \xi_1^2 c_{11} + 4\xi_2^2 c_{23} = 0,$$

$$\text{(5)} \qquad \text{II:} \quad \varrho = +\xi_2^2, \quad c_{11} = 0, \; \xi_1 c_{31} + \xi_2 c_{22} = 0, \; \xi_1 c_{12} + \xi_2 c_{33} = 0.$$

Im Falle $\xi_2 = 0$ ergibt sich nur die eine Gleichung

$$\text{(6)} \qquad c_{11} = 0.$$

Satz 1. *Im syzygetischen Büschel einer Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt hat das Geradentripel ein lineares System von ∞^4 Autopolokoniken: alle Kurven 2. Ordnung durch den Scheitel des Geradentripels. Alle übrigen Kurven des Büschels haben je zwei verschiedene Netze von Autopolokoniken, die sich rational trennen lassen.*

Um eine Vorstellung von den Beziehungen der Autopolokonikennetze zu den Kurven des Büschels zu erhalten, bilden wir die Kurven und Netze auf Ebenenkomplexe und diese auf Punkte im R_{19} ab. Wie im Falle der allgemeinen Kurve 3. Ordnung läuft durch den Bildpunkt der rationalen Kurve 3. Ordnung im $R_9(u)$ eine syzygetische Gerade, deren Projektion von $R_9(x)$ aus auf den $R_9(u)$ die Bildgerade des mit der Kurve verbundenen syzygetischen Büschels liefert. Für die Koordinaten der den Kurven des syzygetischen Büschels, ihren Polarkegelschnittnetzen und den Autopolokonikennetzen der Systeme I und II entsprechenden linearen Ebenenkomplexe (und der entsprechenden Punkte im R_{19}) ergeben sich die Werte [4]):

		Kurve 3. Ordnung.	Polarkegelschnittnetz	Autopolokonikennetze System I	System II
	$\mathfrak{E}_{2'31}$ =	ξ_1,	$-\xi_1\xi_2$,	0,	$\xi_1\xi_2$,
	$\mathfrak{E}_{3'12}$ =	ξ_1,	$-\xi_1\xi_2$,	0,	$\xi_1\xi_2$,
(7)	$\mathfrak{E}_{1'2'3'}$ =	$-4\xi_2$,	0,	$4\xi_2^2$,	0,
	$\mathfrak{E}_{123}$ =	ξ_2,	ξ_2^2,	0,	ξ_2^2,
	$\mathfrak{E}_{12'3'}$ =	0,	ξ_1^2,	ξ_1^2,	ξ_1^2.

So folgt:

Satz 2. *Bei der Abbildung auf Punkte des R_{19} entspricht dem syzygetischen Büschel einer Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt eine im Raume $R_9(u)$ gelegene Gerade $G(u)$. Das System* I *der Autopolokonikennetze wird auf eine Gerade A, das System* II *und das System der Polarkegelschnitte auf einen Kegelschnitt K abgebildet. Der Kegelschnitt K schneidet die Gerade A in einem Punkte (P), der auf K und A den Parameter $\xi_2 = 0$ trägt. Die Kegelschnittebene schneidet $G(u)$ ebenfalls im Punkte (Q) mit dem Parameter $\xi_2 = 0$.*

Die rationale kubische Raumkurve des allgemeinen Falles ist also hier in den Kegelschnitt K und seine Treffgerade A zerfallen.

Durch das Strahlenbüschel mit dem Scheitel Q wird auf dem Kegelschnitt eine Involution:

$$\text{(8)} \qquad \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 = 0$$

ausgeschnitten. Die Gleichungen (7) zeigen, daß sich in dieser Involution das zu einer Kurve gehörige Polarkurvennetz und das Autopolokonikennetz des Systems II entsprechen. Ruhepunkte der Involution sind die Punkte $\xi_2 = 0$ und $\xi_1 = 0$. Daraus folgt erstens, daß die Verbindungslinie der Punkte PQ den Kegelschnitt K im Punkte P berührt, und zweitens, daß der Berührungspunkt S_1 der zweiten, von Q aus an K gelegten

[4]) Hier wie im folgenden haben alle Koordinaten, die fortgelassen sind, den Wert Null.

Tangente das Netz der Polarkurven 2. Ordnung des im Büschel enthaltenen Dreiseits darstellt.

Durch jeden Punkt von $G(u)$ — Bildpunkt einer Kurve ξ des syzygetischen Büschels ($\xi_2 \neq 0$) — läuft, von ξP abgesehen, eine und nur eine gemeinsame Treffgerade des Kegelschnitts K und der Geraden A. Es entsteht so eine (1,2)-Korrespondenz zwischen den Punkten von A und von $G(u)$. Die gemeinsamen Treffgeraden erfüllen eine Regelfläche 3. Ordnung mit einer einfachen und einer doppelt-zählenden Leitgeraden. Den Schnittpunkten der Treffgeraden mit A und K entsprechen die beiden Netze von Autopolokoniken einer Kurve des syzygetischen Büschels, von denen also, wie wir bereits wissen, immer eines dem linearen, das andere dem quadratischen System angehört ($\xi_2 \neq 0$). Da diese immer voneinander verschieden sind, werden die Kurven auf *reguläre Ebenenkomplexe* abgebildet.

Aus der Bildfigur lesen wir ferner den Satz ab:

Satz 3. *Im syzygetischen Büschel einer Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt werden die Kurven durch das in dem Büschel enthaltene Dreiseit und Geradentripel involutorisch derart gepaart, daß zwei zusammengehörige Kurven ein Autopolokonikennetz des 1. Systems gemeinsam haben und das Autopolokonikennetz des 2. Systems der einen Kurve das Polarkegelschnittnetz der anderen Kurve wird.*

Wir können fortfahren:

Satz 4. *Zwei gepaarte Kurven haben ein- und dieselbe Cayleysche Kurve.*

In der Tat: Man erhält das Bild der Cayleyschen Kurve einer vorgegebenen Kurve 3. Ordnung (wie im allgemeinen Falle) durch Projektion der zum Bildpunkt der vorgegebenen Kurve gehörigen syzygetischen Geraden vom Raume $R_9(u)$ aus auf $R_9(x)$. Die beiden in einer Ebene durch $G(u)$ liegenden, zu zwei gepaarten Kurven $\xi_1 : \xi_2$ und $\xi_1 : -\xi_2$ gehörigen syzygetischen Geraden liefern dabei aber nur einen Punkt, den Punkt

$$(9) \qquad \mathfrak{E}_{1'2'3'} = 4\xi_2^2, \quad \mathfrak{E}_{123} = 2\xi_2^2, \quad \mathfrak{E}_{12'3'} = 3\xi_1^2,$$

w. z. b. w.

(9) ist die Parameterdarstellung der Geraden $G(x)$, in welcher der von $G(u)$, der Geraden A und dem Kegelschnitt K aufgespannte Bild-R_3 den Raum $R_9(x)$ schneidet. Die Lage dieser Geraden im Bildraum kann durch zwei Punkte festgelegt werden: $G(x)$ enthält den Punkt P und den Bildpunkt des zum Dreiseit des Büschels gehörigen Dreiecks. Diesen letzten Punkt aber findet man durch die Bemerkung, daß auf der syzygetischen Geraden durch den Bildpunkt D des Dreiseits dieser Punkt D und die Schnittpunkte S_1, S_2, D' mit K und den Geraden A und $G(x)$ das Doppelverhältnis D.V.$(DD'S_1S_2) = -2$ bilden. Damit ist die Bildfigur vollständig beschrieben (vgl. Fig. 1).

Wie im allgemeinen Falle kann man nun, ausgehend von dem Bildpunkte ξ einer Kurve 3. Ordnung auf $G(u)$ zuerst die syzygetische Gerade, ihre Verbindungsebene mit $G(u)$, deren zweiten Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt K, ihren Schnittpunkt mit der Geraden $G(x)$, die Verbindungslinie dieser beiden Schnittpunkte und endlich deren Treffpunkt mit $G(u)$ konstruieren und so nacheinander die Bildpunkte der zur Kurve ξ gehörigen Autopolokonikennetze, der Cayleyschen Kurve, des Polarkegelschnittnetzes und der Hesseschen Kurve finden.

Ausgenommen werden muß hierbei immer das Geradentripel ($\xi_2 = 0$), für welches die Bildfigur bereits ∞^1 Paare von Autopolokonikennetzen — den Punktepaaren der auf K definierten Involution entsprechend — liefert. Schon hieraus kann geschlossen

werden, daß das Geradentripel auf einen zweifach singulären Ebenenkomplex abgebildet wird. Von diesem wird in **5** ausführlicher die Rede sein.

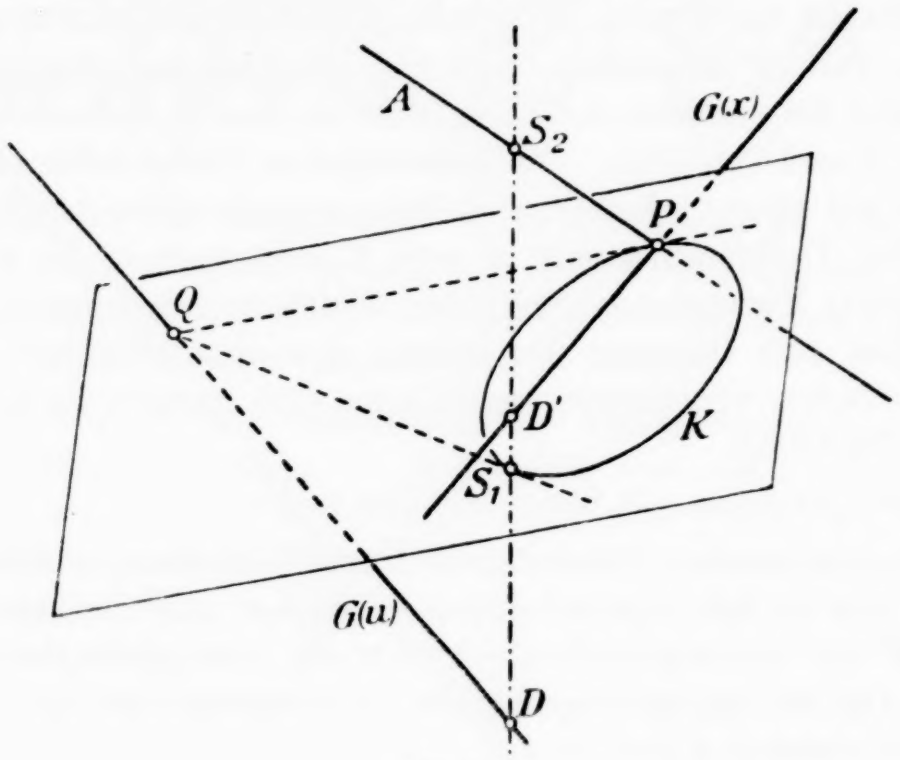


Fig. 1.

2. Die Kurve 3. Ordnung mit Spitze. Das syzygetische Büschel

$$\xi_1(3x_1x_2^2 + x_3^3) - 6\xi_2 x_2^2 x_3 = 0 \tag{10}$$

einer Kurve ($\xi_2 = 0$) mit Spitze verbindet diese Kurve mit ihrer Hesseschen Kurve ($\xi_1 = 0$), die dann allen Kurven des Büschels ($\xi_1 \neq 0$) als Hessesche Kurve gemeinsam ist.

Die Bildfigur der vorigen Nummer spezialisiert sich in der Weise, daß der Kegelschnitt K in zwei Geraden zerfällt, von denen eine mit A identisch wird. Eine Kurve ($\xi_1 \neq 0$) des Büschels hat nämlich, wie eine analog zur Rechnung der vorigen Nummer durchgeführte Untersuchung ergibt, ein einziges doppelt-zählendes Autopolokonikennetz, ein davon verschiedenes Polarkurvennetz und eine bestimmte Cayleysche Kurve. Die Koordinaten der Bildpunkte dieser Figuren im Bild-R_3 des R_{19} sind:

(11)

	Kurve 3. Ordnung	Polarkegelschnittnetz	Autopolokonikennetz	Cayleysche Kurve	Hessesche Kurve
$\mathfrak{E}_{2'3'3}$	$= -2\xi_1,$	$0,$	$0,$	$0,$	$0,$
$\mathfrak{E}_{311'}$	$= +\ \xi_1,$	$0,$	$0,$	$0,$	$0,$
$\mathfrak{E}_{1'23}$	$= +\ \xi_1,$	$0,$	$0,$	$0,$	$0,$
$\mathfrak{E}_{2'1'1}$	$= -4\xi_2,$	$\xi_1,$	$0,$	$\xi_1,$	$-4,$
$\mathfrak{E}_{133'}$	$= +2\xi_2,$	$0,$	$\xi_1,$	$\xi_1,$	$+2,$
$\mathfrak{E}_{12'3'}$	$= 0,$	$2\xi_2,$	$4\xi_2,$	$6\xi_2,$	$0.$

Wir entnehmen dieser Tabelle den Satz:

Satz 5. *Der Bild-R_3 des syzygetischen Büschels einer Kurve 3. Ordnung mit Spitze wird von den beiden windschiefen Geraden $G(u)$ und $G(x)$ aufgespannt, deren Punkte die Kurven des syzygetischen Büschels und die entsprechenden Cayleyschen Kurven darstellen. Autopolokonikennetze und Polarkegelschnittnetze werden auf die Punkte zweier Geraden A und K' abgebildet, die sich auf $G(x)$ im Punkte $\xi_1 = 0$ schneiden. Diese Geraden liegen mit $G(x)$ in einer Ebene, welche $G(u)$ in dem Bildpunkte H ($\xi_1 = 0$) der allen Kurven des syzygetischen Büschels gemeinsamen Hesseschen Kurve schneiden. Die Gerade A ist auf*

$G(u)$ projektiv bezogen. Die einen Punkt ξ von $G(u)$ mit dem entsprechenden Punkte S von A verbindende Gerade (welche M_9^{42} im Punkte S tangiert) ist die zu ξ gehörige syzygetische Gerade. Ihre Verbindungsebene mit $G(u)$ schneidet die Gerade K' im Bildpunkte T des Polarkegelschnittnetzes und die Gerade $G(x)$ im Bildpunkte C der Cayleyschen Kurve der vorgegebenen Kurve ξ (Fig. 2).

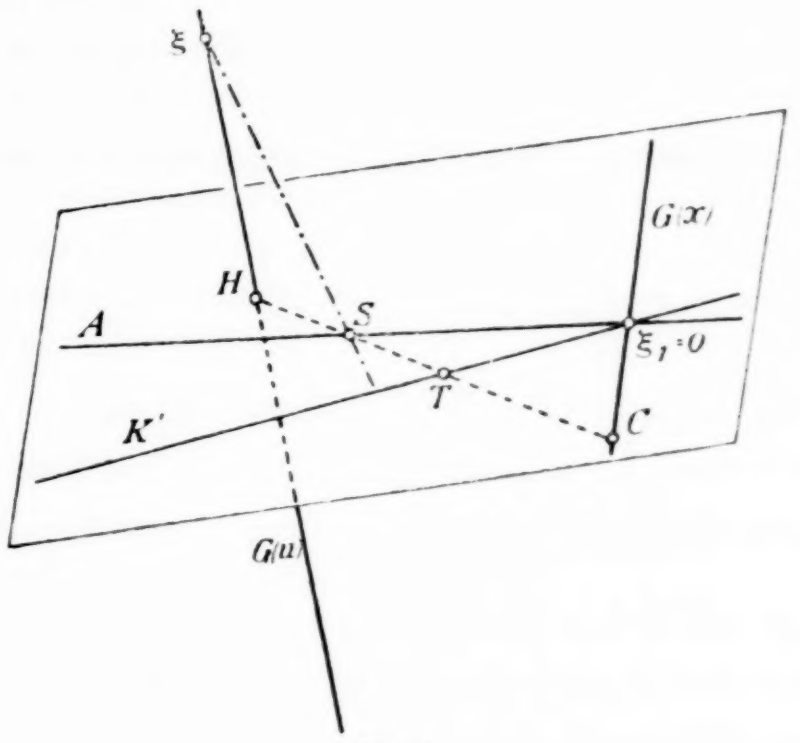


Fig. 2.

Wir bemerken schließlich, daß die Kurve mit Spitze, weil sie ein einziges doppeltzählendes Autopolokonikennetz besitzt, auf einen Ebenenkomplex mit doppelt-zählender Kernebene, also auf einen *einfach-singulären Ebenenkomplex* abgebildet wird.

3. Die Kurve 3. Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Die Kurve 3. Ordnung mit zwei Doppelpunkten

$$\xi_1 x_1^3 + 6\xi_2 x_1 x_2 x_3 = 0 \tag{12}$$

besteht aus einem regulären Kegelschnitt und einer Geraden, die diesen Kegelschnitt in zwei verschiedenen Punkten schneidet. Das zu ihr gehörige syzygetische Büschel wird von dieser dreifach gezählten Geraden ($\xi_2 = 0$) und dem Dreiseit aufgespannt, das diese Gerade zusammen mit den Tangenten in den beiden Schnittpunkten der Geraden mit dem Kegelschnitt bildet ($\xi_1 = 0$). Das zu diesem Dreiseit gehörige Dreieck stellt die allen Kurven des Büschels ($\xi_2 \neq 0$) gemeinsame Cayleysche Kurve dar.

Die Bildfigur im R_{19} ist im Falle der Kurve mit zwei Doppelpunkten eben. Die Ebene wird von der Bildgeraden $G(u)$ des syzygetischen Büschels und einer durch den Punkt D ($\xi_2 = 0$) dieser Geraden laufenden Bildgeraden A der Netze von Polarkegelschnitten der Büschelkurven aufgespannt. Auf $G(u)$ ist ferner der Punkt $\xi_1 = 0$ als Bildpunkt des im syzygetischen Büschel enthaltenen Dreiseits ausgezeichnet. Es ist bekannt [5]), daß die durch ihn hindurchlaufende syzygetische Gerade den Raum $R_9(x)$ schneidet. Der Schnittpunkt C, gleichzeitig der Schnittpunkt unserer Bildebene mit dem Raume $R_9(x)$, ist der Bildpunkt der allen Kurven des Büschels gemeinsamen Cayleyschen Kurve. Dieselbe syzygetische Gerade schneidet die Gerade A im Bildpunkte E des Netzes von Polarkurven 2. Ordnung des Dreiseits und enthält überdies einen weder

[5]) Vgl. die in Anm. 2 zitierte Arbeit, Satz 11.

auf A noch auf $G(u)$ gelegenen Punkt P, der das Netz der Kurven 2. Ordnung darstellt, die das Dreiseit zum Polardreiseit haben.

In der folgenden Tabelle stellen wir die Koordinaten der Bildpunkte zusammen:

	Kurve 3. Ordnung	Polarkegelschnittnetz	Autopolokonikennetz I	Autopolokonikennetz II	Cayleysche Kurve	Hessesche Kurve
	$\mathfrak{E}_{1'23} = -\ \xi_1,$	$+\xi_1,$	$+\xi_1,$	$0,$	$0,$	$-3\xi_1,$
(13)	$\mathfrak{E}_{1'2'3'} = +4\xi_2,$	$0,$	$0,$	$1,$	$2,$	$-4\xi_2,$
	$\mathfrak{E}_{123} = -\ \xi_2,$	$-\xi_2,$	$+\xi_2,$	$0,$	$1,$	$+\xi_2.$

Dieser Tabelle und der Bildfigur (Fig. 3) entnehmen wir den Satz:

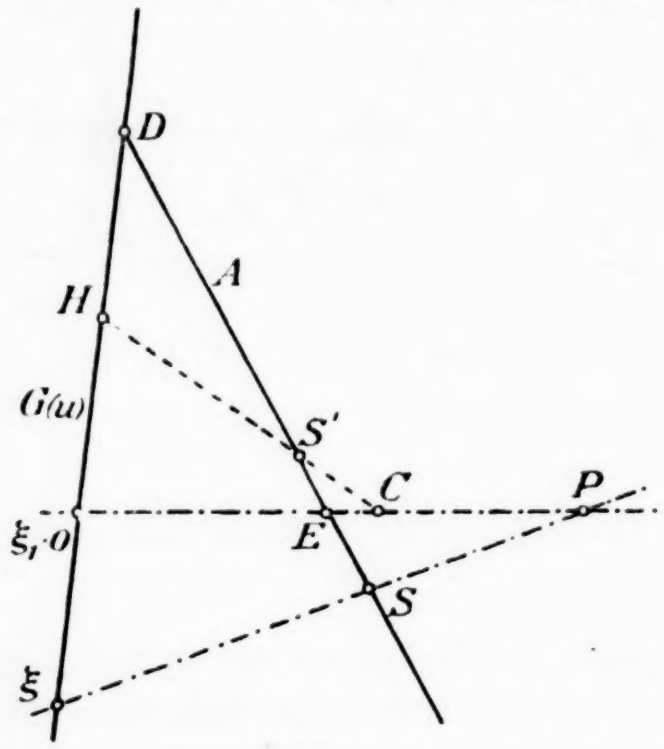


Fig. 3.

Satz 6. *Im syzygetischen Büschel* (12) *einer Kurve 3. Ordnung mit zwei Doppelpunkten gehört zu jeder* ($\xi_2 \neq 0$) *Kurve ein System von zwei verschiedenen Autopolokonikennetzen. Ein Netz* (II) *ist allen Kurven des Büschels gemeinsam: das Netz der Kurven 2. Ordnung, die das Dreiseit des Büschels zum Polardreiseit haben* (Bild: Punkt P). *Das zweite Autopolokonikennetz der Kurve ξ ist das Polarkurvennetz der Kurve ξ' des syzygetischen Büschels, die der Kurve ξ in der durch Dreiseit und dreifache Gerade im Büschel bestimmten Involution entspricht.* (Die Verbindungslinie des Bildpunktes der Kurve ξ mit dem Punkte P schneidet A im Bildpunkte S des Autopolokonikennetzes I. Zu diesem Punkte ist S' in Bezug auf ED der vierte harmonische Punkt.)

Die Kurven des Büschels haben eine gemeinsame Cayleysche Kurve (Bild: Punkt C). *Jede Kurve* ($\xi_2 \neq 0$) *hat eine bestimmte, außer im Falle $\xi_1 = 0$ von ihr verschiedene Hessesche Kurve.* (Die Verbindungslinie von C mit dem Bildpunkt S' des Polarkegelschnittnetzes einer Kurve ξ schneidet den Bildpunkt H der Hesseschen Kurve von ξ aus $G(u)$ aus. D.V.$(DESS') = -1$.)

Da der Ebenenkomplex, auf den unsere Kurve 3. Ordnung abgebildet wird, zwei verschiedene Kernebenen besitzt, wird die Kurve 3. Ordnung mit zwei Doppelpunkten auf einen *regulären linearen Ebenenkomplex* abgebildet.

4. Die in einen Kegelschnitt und eine Tangente dieses Kegelschnittes zerfallene Kurve 3. Ordnung. Im syzygetischen Büschel einer Kurve 3. Ordnung, die in einen regulären Kegelschnitt und eine Tangente dieses Kegelschnittes zerfällt,

$$-6\xi_1 x_1^3 + 3\xi_2(x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3) = 0\,, \tag{14}$$

ist die dreifach gezählte Tangente Hessesche Kurve aller ($\xi_2 \neq 0$) Kurven des Büschels und der dreifach gezählte Berührungspunkt Cayleysche Kurve aller Kurven des Büschels. Die Verbindungslinie der Bildpunkte H und C dieser beiden Kurven besteht ganz aus Bildpunkten von Ebenen. Auf ihr befindet sich der Bildpunkt P des allen Kurven gemeinsamen Polarkegelschnittnetzes und der Bildpunkt A des allen Kurven gemeinsamen doppelt-zählenden Autopolokonikennetzes. Eine Kurve 3. Ordnung, die in einen regulären Kegelschnitt und eine Tangente dieses Kegelschnittes zerfällt, wird also auf einen *einfach-singulären Ebenenkomplex* abgebildet.

Daß das Autopolokonikennetz A doppelt-zählend Autopolokonikennetz wird, kann man der zu dürftig ausgefallenen Bildfigur nicht entnehmen. Wir betrachten daher an Stelle des syzygetischen Büschels das System aller Kurven 3. Ordnung, die in eine Gerade ($x_1 = 0$) und einen diese Gerade in einem fest vorgegebenen Punkt (0 : 0 : 1) berührenden Kegelschnitt zerfallen:

$$X_0 x_1 x_2^2 + x_1^2(X_1 x_1 + X_2 x_2 + X_3 x_3) = 0. \tag{15}$$

In diesem Gebüsch sind zwei Bündel ausgezeichnet:

Das Bündel $X_0 = 0$ der Kurven 3. Ordnung, die in die doppelt gezählte Gerade $x_1 = 0$ und eine beliebige zweite Gerade zerfallen.

Das Bündel $X_3 = 0$ der Kurven 3. Ordnung, die in die Gerade $x_1 = 0$ und ein Geradenpaar zerfallen, das seinen Scheitel im Punkte 0 : 0 : 1 hat.

Diese beiden Bündel durchdringen sich in dem Büschel $X_0 = 0$, $X_3 = 0$ derjenigen Kurven 3. Ordnung, die in die doppeltgezählte Gerade $x_1 = 0$ und eine beliebige, durch den Punkt 0 : 0 : 1 laufende Gerade zerfallen. In diesem Büschel befindet sich ($X_0 = X_2 = X_3 = 0$) die dreifach gezählte Gerade $x_1 = 0$.

Unter einer Kurve allgemeiner Lage des Gebüsches verstehen wir im folgenden eine Kurve, die keinem der beiden ausgezeichneten Bündel und also dem in dieser Nummer zu untersuchenden Kurventypus angehört.

Bei der Abbildung auf R_{19} wird das Gebüsch (15) auf einen R_3^* des $R_9(u)$ abgebildet, der durch folgende Parameterdarstellung geliefert wird:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{E}_{2'3'3} = -2X_0, & \mathfrak{E}_{1'3'3} = +2X_2, & \mathfrak{E}_{1'2'2} = -2X_3, \\ \mathfrak{E}_{311'} = +X_0, & \mathfrak{E}_{322'} = -X_2, & \mathfrak{E}_{233'} = +X_3, \\ \mathfrak{E}_{1'23} = -3X_1. & & \end{array} \tag{16}$$

In diesem Raume sind, den Bündeln $X_0 = 0$ und $X_3 = 0$ entsprechend, zwei Ebenen ausgezeichnet, die sich in einer Geraden schneiden, auf welcher sich der Bildpunkt H der allen Kurven allgemeiner Lage des Gebüsches gemeinsamen Hesseschen Kurve $x_1^3 = 0$ befindet. (Für die übrigen Kurven wird die Hessesche Kurve unbestimmt.) Dieselben Kurven des Gebüsches haben auch alle ein- und dieselbe Cayleysche Kurve, den dreifach gezählten Berührungspunkt $u_3^3 = 0$, welcher auf einen Punkt C von $R_9(x)$ abgebildet wird. Da H, C Bildpunkte von zwei Ebenen sind, die sich in einer Geraden schneiden, sind die Punkte der Verbindungslinie sämtlich Bildpunkte von Ebenen, die Gerade HC liegt auf M_9^{42}. Für das Folgende ist es nun wichtig, die Beziehung zwischen den Punkten dieser Geraden und den Ebenen des durch $X_0 = 0$, $X_3 = 0$ aufgespannten Ebenenbüschels im R_3^* zu kennen.

Jede Ebene des Büschels $a_0 X_0 + a_3 X_3 = 0$ stellt zunächst ein Bündel von Kurven 3. Ordnung dar. Sie ist aber — weil jede Kurve in die Gerade $x_1 = 0$ und einen Kegelschnitt zerfällt — zugleich Repräsentantin eines Kegelschnittnetzes. Wir wollen die

Büschelebene, die einen Punkt allgemeiner Lage mit der Geraden $X_0 = 0$, $X_3 = 0$ verbindet, kurz die „Verbindungsebene" des Punktes nennen und in demselben Sinne von dem Verbindungsbündel einer Kurve 3. Ordnung unseres Gebüsches und dem Verbindungsnetz einer Kurve 2. Ordnung unseres Gebüsches sprechen. Wir behaupten dann:

Satz 7. *Die Ebenen des ausgezeichneten Ebenenbüschels im Raume R_3^* stellen die Autopolokonikennetze und Polarkegelschnittnetze des Kurvengebüsches dar. Alle Kurven eines Verbindungsbündels haben das gleiche Polarkegelschnittnetz und das gleiche doppeltzählende Autopolokonikennetz. Man erhält die Bildebene des Polarkegelschnittnetzes einer Kurve 3. Ordnung Y, indem man zu der Ebene $X_3 = 0$ die vierte harmonische Ebene in Bezug auf $X_0 = 0$ und die Verbindungsebene von Y bestimmt. Man erhält die Bildebene ihres Autopolokonikennetzes, indem man die vierte harmonische Ebene zu ihrer Verbindungsebene in Bezug auf die Ebenen $X_0 = 0$, $X_3 = 0$ bestimmt.*

Den Beweis liefert die Rechnung. Man findet als Gleichungen der drei mit einer Kurve Y allgemeiner Lage des Gebüsches verbundenen Netze und als Koordinaten ihrer Bildpunkte im R_{19}:

$$(17)\quad \begin{cases} \text{Verbindungsnetz:} \\ \quad c_{33} = 0,\ c_{23} = 0,\ Y_3 c_{22} - 2Y_0 c_{31} = 0;\ \ \mathfrak{E}_{1'23} = -Y_3,\ \mathfrak{E}_{31'2'} = +2Y_0, \\ \text{Polarkegelschnittnetz:} \\ \quad c_{33} = 0,\ c_{23} = 0,\ Y_3 c_{22} - Y_0 c_{31} = 0;\ \ \mathfrak{E}_{1'23} = +Y_3,\ \mathfrak{E}_{31'2'} = -Y_0, \\ \text{Autopolokonikennetz:} \\ \quad c_{33} = 0,\ c_{23} = 0,\ Y_3 c_{22} + 2Y_0 c_{31} = 0;\ \ \mathfrak{E}_{1'23} = +Y_3,\ \mathfrak{E}_{31'2'} = +2Y_0. \end{cases}$$

Diese Koordinaten zeigen aber weiter, daß die ∞^1 den Ebenen des ausgezeichneten Ebenenbüschels entsprechenden Kegelschnittnetze (bei der Abbildung der Ebenen des $\mathfrak{R}_5$ auf die Punkte des R_{19}) auf die Punkte der Geraden HC abgebildet werden, und es gilt nun, den Zusammenhang zwischen den Punkten von HC und den Ebenen des ausgezeichneten Büschels konstruktiv im R_{19} herzustellen. Wir behaupten:

Satz 8. *Die Tangential-R_9 der Punkte der Geraden HC an M_9^{42} schneiden $R_9(u)$ in dem ausgezeichneten Ebenenbüschel. Der Berührungs-R_9 im Bildpunkte des Autopolokonikennetzes der Kurve Y schneidet $R_9(u)$ in der Verbindungsebene der Kurve Y.*

Zum Beweise stellen wir die *Gleichungen des Tangential-R_9 der M_9^{42} im Punkte* $\mathfrak{E}_{1'23} = Y_3$, $\mathfrak{E}_{31'2'} = 2Y_0$ auf. Nach C. Segre [6]) wird er von den Bildpunkten aller der Ebenen aufgespannt, welche die Bildebene des vorgegebenen Punktes in einer Geraden schneiden. Man erhält eine Parameterdarstellung dieser Ebenen, wenn man zwei beliebige Punkte der Bildebene des Berührungspunktes mit einem beliebigen dritten Punkt des R_{19} verbindet. Dieser Parameterdarstellung entnimmt man dann die Gleichungen des Tangential-R_9:

$$(18)\quad \begin{aligned} &\mathfrak{E}_{13'i'} = 0, \quad (i = 2, 3, 1', 2') && 2Y_0\mathfrak{E}_{123} - Y_3\mathfrak{E}_{12'3} = 0, \\ &\mathfrak{E}_{122'} = 0, && 2Y_0\mathfrak{E}_{121'} - Y_3\mathfrak{E}_{12'1'} = 0, \\ &\mathfrak{E}_{3'2'2} = 0, && 2Y_0\mathfrak{E}_{3'23} - Y_3\mathfrak{E}_{3'2'3} = 0, \\ & && 2Y_0\mathfrak{E}_{3'21'} - Y_3\mathfrak{E}_{3'2'1'} = 0, \end{aligned}$$

der den $R_9(u)$, wie behauptet, in der Verbindungsebene des Bildpunktes (16) der Kurve Y schneidet.

---

[6]) C. Segre, Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni, Ann. di Mat. (3) **27** (1918), S. 75; (16), (17).

5. Das Geradentripel. Bildet man die dreifach gezählten Geraden durch den Punkt $0:0:1$ auf Punkte des $R_9(u)$ ab, so erhält man eine Raumkurve 3. Ordnung, welche einen R_3 aufspannt. Die Punkte allgemeiner Lage dieses Raumes stellen Geradentripel dar, die aus drei verschiedenen Geraden bestehen. Liegt der Punkt auf der Tangentenfläche der C^3, so ist er der Bildpunkt einer Kurve 3. Ordnung, die in eine doppeltzählende und eine einfach-zählende Gerade zerfällt, und handelt es sich endlich um einen Punkt der C^3 selbst, so entspricht ihm eine dreifach-zählende Gerade.

Die Gleichung

$$x_1^3 + x_2^3 = 0 \tag{19}$$

stellt ein allgemeines Geradentripel dar. Es wird auf einen *zweifach-singulären Ebenenkomplex* abgebildet. In der Tat zeigt die Gleichung des Bildkomplexes

$$\mathfrak{E}_{12'3'} + \mathfrak{E}_{23'1'} = 0, \tag{20}$$

daß dieser Komplex von zwei Ebenen aufgespannt werden kann, die sich in einem Punkte (Bildpunkt der Kurve $u_3^2 = 0$) schneiden und (daher) in einem $\mathfrak{R}_4$ (Bild-$\mathfrak{R}_4$ der Kurve $x_1 x_2 = 0$) liegen. Sucht man nun die Autopolokoniken der Kurve, so wird man auf nur eine Gleichung $c_{33} = 0$ geführt (vgl. Satz 1), welche besagt, daß der Bild-$\mathfrak{R}_4$ der Autopolokonik durch den Bildpunkt von $u_3^2 = 0$ laufen soll. Hiernach gäbe es ∞^4 Autopolokoniken eines Geradentripels und ∞^6 Netze von Autopolokoniken.

Will man aber eine völlige Analogie zwischen der Theorie der Autopolokoniken und der linearen Ebenenkomplexe erreichen, so darf man nur solche Netze Autopolokonikennetze nennen, die gleichzeitig die Kurve $x_1 x_2 = 0$ enthalten, so daß die Bildebenen in dem ausgezeichneten $\mathfrak{R}_4$ liegen und durch den ausgezeichneten Punkt laufen. Dann kann man sagen:

Satz 9. *Ein Geradentripel* ($x_1^3 + x_2^3 = 0$ *oder* $x_1^2 x_2 = 0$) *wird auf einen zweifach-singulären Ebenenkomplex abgebildet. Den* ∞^4 *Kernebenen dieses Komplexes entsprechen die* ∞^4 *Kegelschnittnetze, welche als Netze von Kurven 2. Ordnung die Hessesche Kovariante des Geradentripels* ($x_1 x_2 = 0$ *oder* $x_1^2 = 0$) *und als Netze von Kurven 2. Klasse den zweifach gezählten Scheitel des Geradentripels* ($u_3^2 = 0$) *enthalten.*

Die Autopolokonikennetze werden auf eine reguläre M_4^2 abgebildet, die $R_9(u)$ in zwei (verschiedenen — $x_1^3 = 0$, $x_2^3 = 0$ — oder zusammenfallenden — $x_1^3 = 0$ —) Punkten, den $R_9(u)$ in einem einzigen Punkte ($u_3^3 = 0$) schneidet.

6. Klassifikation der Kurven 3. Ordnung. Wir schließen mit einer Zusammenstellung, in welcher wir die Kurven 3. Ordnung nach der Art der ihnen zugeordneten linearen Ebenenkomplexe anordnen:

I. *Bildkomplex regulär.*
1. Allgemeine Kurve.
2. Kurve mit Doppelpunkt.
3. Kegelschnitt mit Sekante.
4. Dreiseit.

II. *Bildkomplex einfach-singulär.*
5. Äquianharmonische Kurve.
6. Kurve mit Spitze.
7. Kegelschnitt mit Tangente.

III. *Bildkomplex zweifach-singulär.*

8. Geradentripel aus drei verschiedenen Geraden.
9. Geradentripel aus einer doppelt-zählenden und einer einfach-zählenden Geraden.

IV. *Bildkomplex höchstsingulär.*

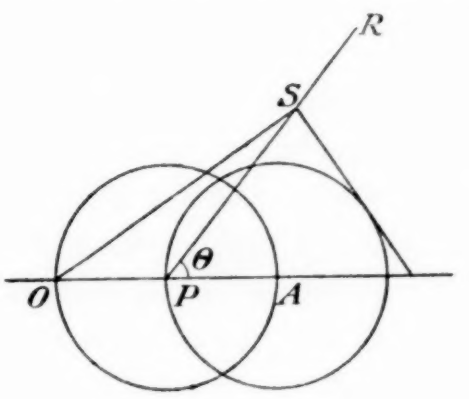
10. Dreifache Gerade.

Eingegangen 4. Juni 1935.

A note on Bieberbach's trisection method.

By *Raymond Garver.*

In a recent paper „Zur Lehre von den kubischen Konstruktionen“ [1]) Bieberbach has given an interesting method of trisecting an arbitrary angle which requires only one construction with a movable right angle in addition to constructions with straight edge and compass. The method is as illustrated in the figure.



A circle of unit radius is described with center at A. A diameter cuts the circle at P, and is extended to O, a unit beyond P. The circle with unit radius and center at P is not used in Bieberbach's trisection; it will be considered later. The angle θ to be trisected is placed as in the figure, with its vertex at P. Note that θ may be taken as an acute angle without real loss of generality, since a larger angle can be expressed as an acute angle plus a multiple of ninety degrees, and since a thirty-degree angle is easily constructible. The movable right angle is now employed; we may use the corner of a sheet of paper or a right angle carefully constructed on transparent paper. The vertex of the right angle is made to slide along PR, with one side of the right angle always passing through O, until the other side becomes tangent to the constructed circle.

The point on PR which is thus located is called S on the figure; it can actually be located quite accurately, but Bieberbach points out that his interest in the construction is from the standpoint of theory rather than of practice. After the location of S has been indicated, Bieberbach proves that $PS = 2 \cos \theta/3$ [2]). The angle $\theta/3$ can then be constructed at once.

In this note I propose to show that Bieberbach's trisection is equivalent to trisection with a limaçon, and to indicate an alternate, and very easy, method of determining the point S which does not require either the movable right angle or an actual drawn limaçon. As a matter of fact, these two results are obtained in the order reverse to that indicated.

---

[1]) Ds. Journal **167** (1932), S. 142—146.

[2]) This result is true when θ is acute, as we are assuming it to be. In other cases it is subject to slight modifications.

Consider an ordinary coordinate system with origin at O and x-axis along OA. The equation of OS may be taken as $y = mx$, and that of PR as $y = k(x - 1)$. These two lines meet at the point whose coordinates are $[k/(k - m),\ km/(k - m)]$.

Now if S is determined by Bieberbach's method it is not difficult to show that k and m are subject to the condition

$$k = \frac{2m + m\sqrt{m^2 + 1}}{\sqrt{m^2 + 1} + 1 - m^2}.$$

Using this value of k, the y-coordinate of S becomes

$$\frac{2m + m\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 + 1}.$$

Denote angle AOS by ψ. We then have $\sin\psi = m/\sqrt{1 + m^2}$, and OS is the y-coordinate of S divided by $\sin\psi$. Simplifying, we find

$$OS = \frac{2}{\sqrt{1 + m^2}} + 1 = 2\cos\psi + 1\,.$$

We may then state

Theorem I. *The point S is defined by the condition that, of the total length of OS, just one unit lies outside the circle with center at P and unit radius.*

This method of determining S seems to be a little more convenient, at least from a practical standpoint, than that involving the movable right angle. We further state

Theorem II. *Bieberbach's trisection is equivalent to trisection with a limaçon.*

For we have proved that S is the intersection of PR with $\varrho = 1 + 2\cos\psi$, the pole and polar axis being O and OA.

Eingegangen 10. Mai 1935.

Über die Torsion einer Überdeckung.

Von *Wolfgang Franz* in Marburg.

Im folgenden wird jeder Überdeckung [1])[2]) eines topologischen Komplexes mit einem (kommutativen) Körper, deren sämtliche Bettischen Zahlen Null sind, eine Invariante zugeordnet. Auf Grund ihrer Bedeutung für die Überdeckung und den Komplex, insbesondere für die später erklärten Linsenräume, wird sie die Torsion der Überdeckung bzw. des zugehörigen Kettenringes genannt. Bei Zugrundelegung des Homotopiekettenringes [3]), einer Überdeckung mit dem Gruppenring der Fundamentalgruppe mit ganzen rationalen Koeffizienten, ist die Torsion zugleich eine topologische Invariante des Komplexes selbst. Sie stellt dann eine Verallgemeinerung einer Invariante dar, die K. Reidemeister für dreidimensionale Linsenräume und allgemeiner für Normalformen dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten mit nur einer dreidimensionalen und einer nulldimensionalen Zelle aufgestellt hat [4]) und mit deren Hilfe er das Homöomorphieproblem für Linsenräume gelöst hat [5]). — Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wird die Torsion definiert und ihre Invarianz festgestellt. Ferner wird in gewissem Sinne die Einzigkeit dieser Invariante nachgewiesen. Der zweite Teil bringt eine Anwendung auf das spezielle Problem der von G. de Rham eingeführten $(2n + 1)$-dimensionalen Verallgemeinerungen der Linsenräume [6]), die wir auch kurz Linsenräume nennen. Diese Räume besitzen, ebenso wie im Spezialfall von drei Dimensionen, eine endliche zyklische Fundamentalgruppe der Ordnung m, ihr Gruppenring ist also eine kommutative halbeinfache Algebra bzw. eine Ordnung einer solchen, d. h. eine direkte Summe von Körpern, und zwar von Kreiskörpern. Der Homotopiekettenring zerlegt sich entsprechend in die von einander unabhängigen Überdeckungen mit den einzelnen Kreiskörpern. Die Torsion wird in jedem Falle eine ganze algebraische Zahl, und der Vergleich für die verschiedenen Linsenräume führt auf die Frage nach der Unabhängigkeit von gewissen Einheiten im m-ten Kreiskörper, die im wesentlichen mit den Kreiseinheiten [7]) identisch sind. Wenn m eine Primzahl (allgemeiner eine Primzahlpotenz) ist, so zeigt der bekannte Kummersche Ausdruck für die Idealklassenzahl im m-ten Kreiskörper, daß diese Einheiten unab-

[1]) K. Reidemeister, Überdeckungen von Komplexen, Journ. f. reine u. angew. Math. **173** (1935), im folgenden zitiert als U_1. Herrn Professor Reidemeister bin ich für vielfache Anregungen bei dieser Arbeit zu großem Dank verpflichtet.

[2]) W. Franz, Überdeckungen topologischer Komplexe mit hyperkomplexen Systemen, Journ. f. reine u. angew. Math. **173** (1935), im folgenden zitiert als U_2.

[3]) K. Reidemeister, Homotopiegruppen von Komplexen, Hamburger Abhandl. **10** (1934).

[4]) Siehe U_1, § 6.

[5]) K. Reidemeister, Homotopieringe und Linsenräume, Hamburger Abhandl. **11** (1935).

[6]) G. de Rham, Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions, Journ. de Math. pur. et appl., ser. 9, **10** (1931).

[7]) D. Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresber. d. D. M. V. **4** (1897), § 98.

hängig sind. Während von dieser Tatsache für das Homöomorphieproblem im dreidimensionalen Fall nur eine relativ einfache Teilaussage notwendig ist, wird für die Lösung des Problems im allgemeinen Fall die volle Aussage herangezogen. Bei beliebig zusammengesetztem m kann man sich entsprechend auf die Tatsache stützen, daß die sämtlichen zum m-ten Kreiskörper und seinen Teilkörpern gehörigen Kreiseinheiten ein volles System von Einheiten des Körpers bilden (d. h. in der vollen Einheitengruppe des Körpers eine Untergruppe von endlichem Index erzeugen). Etwas einfacher kommt man zum Ziel, wenn man die Tatsache benutzt, daß die L-Reihen $L(s, \chi)$ des rationalen Zahlkörpers bei $s = 1$ nicht verschwinden, wenn χ nicht der Hauptcharakter ist.

I.

1. *Bezeichnungen und Sätze aus der Determinantentheorie.* Die Matrix A mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper sei vom Typus (m, n) (m Zeilen und n Spalten) und vom Range r. $A^{(\nu)}$, die ν-te Abgeleitete von A [8]), besteht aus allen ν-reihigen Unterdeterminanten von A in lexikographischer Anordnung. $A^{(\nu)}$ ist vom Typus $\left(\binom{m}{\nu}, \binom{n}{\nu}\right)$ und vom Range $\binom{r}{\nu}$. Ist B vom Typus (n, l), so ist $(AB)^{(\nu)} = A^{(\nu)}B^{(\nu)}$. — $A^{\langle\nu\rangle}$ entsteht aus A durch Übergang zu den ν-reihigen Unterdeterminanten in lexikographischer Anordnung, je nach der Summe der beteiligten Zeilen- und Spaltenindizes mit positivem oder negativem Vorzeichen, und durch Spiegelung an der Nebendiagonale. $A^{\langle\nu\rangle}$ ist vom Typus $\left(\binom{n}{\nu}, \binom{m}{\nu}\right)$ und vom Rang $\binom{r}{\nu}$. Es gilt $(AB)^{\langle\nu\rangle} = B^{\langle\nu\rangle}A^{\langle\nu\rangle}$. — Ist A n-reihig quadratisch mit der Determinante $|A|$, so gilt der Laplacesche Entwicklungssatz $A^{(\nu)}A^{\langle n-\nu\rangle} = |A|E$ ($\binom{n}{\nu}$-reihige Einheitsmatrix), für $|A| \neq 0$ insbesondere $A^{-1} = |A|^{-1}A^{\langle n-1\rangle}$, $(A^{(\nu)})^{-1} = |A|^{-1}A^{\langle n-\nu\rangle}$. Ferner gilt [9]) $(A^{\langle n-1\rangle})^{(\nu)} = |A|^{\nu-1}A^{\langle n-\nu\rangle}$, für $|A| \neq 0$ insbesondere $(A^{-1})^{(\nu)} = |A|^{-1}A^{\langle n-\nu\rangle}$, $(A^{-1})^{\langle\nu\rangle} = |A|^{-1}A^{(n-\nu)}$. Setzt man $A^{(0)} = A^{\langle 0\rangle} = 1$, so gelten diese Sätze auch für $\nu = 0$.

2. *Ein Satz über lineare Gleichungen.* Die Gleichung $A\mathfrak{x} = 0$, in der $\mathfrak{x}$ eine zu bestimmende n-gliedrige Spalte bedeutet, hat $n - r$ unabhängige Lösungen, die zu der $(n, n-r)$-reihigen Matrix X vereinigt seien. Jede andere Lösung $\mathfrak{x}_1$ dieser Gleichung läßt sich aus den Spalten von X linear kombinieren; ist X_1 eine beliebige (n, k)-reihige Matrix mit $AX_1 = 0$, so ist X_1 von der Gestalt $X_1 = XZ$ mit $(n-r, k)$-reihigem Z. X ist vom Rang $n - r$, $X^{(n-r)}$ ist also vom Rang 1 und stellt eine von der Nullspalte verschiedene $\binom{n}{r}$-gliedrige Spalte dar. Ferner gilt $X_1^{(n-r)} = X^{(n-r)}Z^{(n-r)}$; dabei ist $Z^{(n-r)}$ eine $\binom{k}{n-k}$-gliedrige Zeile, die Spalten von $X_1^{(n-r)}$ sind Vielfache der Spalte $X^{(n-r)}$. Wir können daher sagen: Ist $AY = 0$, so sind die Spalten von $Y^{(n-r)}$, soweit

[8]) Über die im folgenden benutzten abgeleiteten und adjungierten Matrizen siehe L. Kronecker, Vorlesungen über die Theorie der Determinanten. Bearbeitet und fortgeführt von K. Hensel, Leipzig 1903, 19. Vorlesung.

[9]) Satz von Jacobi. Vgl. Kronecker-Hensel a. a. O. [8]), S. 334/5. Der Satz ergibt sich, wenn man in dem speziellen Laplaceschen Satz $AA^{\langle n-1\rangle} = |A|E$ die ν-ten Abgeleiteten bildet und das Ergebnis mit dem allgemeinen Laplaceschen Satz vergleicht.

sie von der Nullspalte verschieden sind, einander proportional. Analog: Ist $YA = 0$, so sind die Zeilen von $Y^{(m-r)}$, soweit sie von der Nullzeile verschieden sind, einander proportional.

Wir wollen diese durch A bestimmte, bis auf einen Proportionalitätsfaktor festgelegte $\binom{n}{r}$-gliedrige Spalte $\mathfrak{s}$ und $\binom{m}{r}$-gliedrige Zeile $\mathfrak{z}$ durch A ausdrücken. Sei in A etwa die linke obere r-reihige Eckunterdeterminante von Null verschieden. A_0 gehe aus A durch Streichung der $m - r$ letzten Zeilen und Anfügung von $n - r$ derartigen anderen Zeilen hervor, daß A_0 eine von Null verschiedene Determinante bekommt. Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz bilden dann die $n - r$ letzten Spalten von $A_0^{\langle n-1\rangle}$ ein volles unabhängiges Lösungssystem für die Gleichung $A\mathfrak{x} = 0$. Die letzte Spalte von $(A_0^{\langle n-1\rangle})^{(n-r)}$ ist also zu $\mathfrak{s}$ proportional. Nach dem am Schluß von Nr. 1 angeführten Satz ist $(A_0^{\langle n-1\rangle})^{(n-r)}$ proportional zu $A_0^{\langle r\rangle}$. Die letzte Spalte von $A_0^{\langle r\rangle}$ ist aber dieselbe wie die letzte Spalte von $A^{\langle r\rangle}$. Da alle Spalten von $A^{\langle r\rangle}$ einander proportional sind, können wir sagen: Ist $AY = 0$, so sind die Spalten von $Y^{(n-r)}$ den von der Nullspalte verschiedenen Spalten von $A^{\langle r\rangle}$ proportional; ist $YA = 0$, so sind die Zeilen von $Y^{(m-r)}$ den von der Nullzeile verschiedenen Zeilen von $A^{\langle r\rangle}$ proportional.

3. *Formulierung des Äquivalenzproblemes.* $\mathfrak{R}$ sei ein n-dimensionaler topologischer Komplex bestehend aus den Zellen a_i^k ($k = 0, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, \alpha_k$), $\mathfrak{U}$ eine Überdeckung von $\mathfrak{R}$ mit einem Körper K, definiert durch die Berandungsmatrizen R_k ($k = 0, \ldots, n-1$) vom Typus (α_{k+1}, α_k) und vom Rang r_k. Es gilt $R_k R_{k-1} = 0$. Die Bettischen Zahlen von $\mathfrak{U}$ sind $p_k = \alpha_k - r_k - r_{k-1}$; dabei ist $r_n = r_{-1} = 0$ gesetzt. Wir machen die Voraussetzung, daß alle p_k Null sind, so daß $\alpha_0 = r_0$, $\alpha_n = r_{n-1}$, $\alpha_k = r_k + r_{k-1}$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$. Bei elementarer Unterteilung von $\mathfrak{R}$, etwa bei Einführung zweier neuer Zellen $a^{k+1}_{\alpha_{k+1}+1}$, $a^k_{\alpha_k+1}$ bekommt R_{k+1} eine neue aus lauter Nullen bestehende Spalte, R_{k-1} eine neue aus lauter Nullen bestehende Zeile und R_k eine neue Spalte und eine neue Zeile, die an ihrem Schnittpunkt eine 1 und sonst lauter Nullen enthalten. Danach kann man erreichen, das alle $r_k > 0$ sind, was wir im folgenden voraussetzen. Bei einem Basiswechsel unter den k-dimensionalen Zellen, der durch α_k-reihige Matrizen P_k mit $|P_k| \neq 0$ $(k = 0, \ldots, n)$ vermittelt wird, geht R_k über in $P_{k+1} R_k P_k^{-1}$. Wir wollen nun nur solche Transformationsmatrizen P_k zulassen, deren Determinanten $|P_k|$ in eine fest gegebene multiplikative Gruppe $\mathfrak{E}$ von Elementen $\neq 0$ des Körpers K fallen; durch diese Gruppe $\mathfrak{E}$ werden die hier zu betrachtenden Überdeckungen genauer festgelegt [10]). Dann entsteht folgendes rein algebraische Äquivalenzproblem: Es ist ein volles Invariantensystem anzugeben für alle Systeme von Matrizen, die aus dem System $R_{n-1}, \ldots, R_0$ durch Transformationen der angegebenen Art hervorgehen.

4. *Definition der Torsion.* Wir bilden das Matrizensystem

$$R_{n-1}^{(r_{n-1})},\ R_{n-2}^{\langle r_{n-2}\rangle},\ R_{n-3}^{(r_{n-3})}, \ldots,\ \begin{cases} R_1^{(r_1)},\ R_0^{\langle r_0\rangle}, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ R_1^{\langle r_1\rangle},\ R_0^{(r_0)}, & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Alle diese Matrizen sind vom Range 1, lassen sich also als Matrizenprodukt einer Spalte

[10]) Bei den früher in U_2 betrachteten Überdeckungen war $\mathfrak{E}$ als die Gruppe aller Körperelemente $\neq 0$ angenommen. In dem Falle sind, wie dort bewiesen, die Bettischen Zahlen die einzigen Invarianten der Überdeckung. Vgl. darüber auch U_1, § 1, letzter Absatz.

und einer Zeile schreiben: $R_k^{(r_k)}$ bezw. $R_k^{\langle r_k\rangle} = \mathfrak{s}_k \mathfrak{d}_k$, wobei $\mathfrak{s}_k$ und $\mathfrak{d}_k$ nicht ganz aus Nullen bestehen und nur bis auf eine willkürliche Konstante bestimmt sind, die an $\mathfrak{s}_k$ als Multiplikator und gleichzeitig an $\mathfrak{d}_k$ als Divisor angebracht werden darf. $R_{n-1}^{(r_{n-1})}$ ist eine Zeile, $\mathfrak{s}_{n-1}$ ist also ein Körperelement $\neq 0$; $R_0^{\langle r_0\rangle}$ ist eine Zeile, $R_0^{(r_0)}$ eine Spalte, $\mathfrak{s}_0$ (bei geradem n) bezw. $\mathfrak{d}_0$ (bei ungeradem n) sind also Körperelemente $\neq 0$. Nach dem Satz von Nr. 2 ist $\mathfrak{d}_{n-1}$ zu $\mathfrak{d}_{n-2}$, $\mathfrak{s}_{n-2}$ zu $\mathfrak{s}_{n-3}$, $\mathfrak{d}_{n-3}$ zu $\mathfrak{d}_{n-4}$ u.s.f. proportional. Aus den Proportionalitätsfaktoren bilden wir das von Null verschiedene Produkt

$$\mathsf{T} = \mathfrak{s}_{n-1} \cdot \frac{\mathfrak{d}_{n-1}}{\mathfrak{d}_{n-2}} \frac{\mathfrak{s}_{n-3}}{\mathfrak{s}_{n-2}} \cdots \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{s}_1}{\mathfrak{s}_2} \dfrac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_0} \cdot \dfrac{1}{\mathfrak{s}_0} & \text{bei geradem } n, \\ \dfrac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{d}_1} \dfrac{\mathfrak{s}_0}{\mathfrak{s}_1} \cdot \mathfrak{d}_0 & \text{bei ungeradem } n. \end{cases}$$

T ist von den genannten willkürlichen Konstanten unabhängig und heiße die Torsion der Überdeckung $\mathfrak{U}$.

In dem — topologisch bedeutungslosen — Falle $n = 1$ ist T gleich der Determinante der (in diesem Falle einzigen, quadratischen) Berandungsmatrix R_0.

5. *Invarianz von* T. Bei Transformation durch Matrizen P_k mit $|P_k| \neq 0$, etwa bei Ersetzung von R_k durch $R_k P_k^{-1}$ und von R_{k-1} durch $P_k R_{k-1}$, geht $R_k^{(r_k)}$ über in

$$(R_k P_k^{-1})_k^{(r_k)} = R_k^{(r_k)} (P_k^{-1})^{(r_k)} = R_k^{(r_k)} |P_k|^{-1} P_k^{\langle \alpha_k - r_k\rangle} = R_k^{(r_k)} |P_k|^{-1} P_k^{\langle r_{k-1}\rangle},$$

letzteres nach dem Satze am Schluß von Nr. 1 und wegen $\alpha_k = r_k + r_{k-1}$. $R_{k-1}^{\langle r_{k-1}\rangle}$ geht über in

$$(P_k R_{k-1})^{\langle r_{k-1}\rangle} = R_{k-1}^{\langle r_{k-1}\rangle} P_k^{\langle r_{k-1}\rangle}.$$

Bei der Bildung von T kann man also $\mathfrak{s}_k$ und $\mathfrak{s}_{k-1}$ beibehalten, wenn man $\mathfrak{d}_k$ durch $\mathfrak{d}_k |P_k|^{-1} P_k^{\langle r_{k-1}\rangle}$ und $\mathfrak{d}_{k-1}$ durch $\mathfrak{d}_{k-1} P_k^{\langle r_{k-1}\rangle}$ ersetzt. Der Quotient $\mathfrak{d}_k/\mathfrak{d}_{k-1}$ der beiden Zeilen bekommt also den Faktor $|P_k|^{-1}$. In ähnlicher Weise ändert sich der Quotient $\mathfrak{s}_k/\mathfrak{s}_{k-1}$ beim Übergang von $R_k^{\langle r_k\rangle}$ und $R_{k-1}^{(r_{k-1})}$ zu $(R_k P_k^{-1})^{\langle r_k\rangle}$ und $(P_k R_{k-1})^{(r_{k-1})}$, und zwar bekommt er den Faktor $|P_k|$. Durch die Transformationsmatrizen P_n und P_0^{-1} endlich bekommen $\mathfrak{s}_{n-1}$ und $\mathfrak{s}_0$ (bei geradem n) bezw. $\mathfrak{d}_0$ (bei ungeradem n) die Faktoren $|P_n|$ und $|P_0|^{-1}$. Insgesamt bekommt T bei der Transformation nur Faktoren der Form $|P_k|^{\pm 1}$. Wenn also alle Determinanten $|P_k|$ in die Gruppe $\mathfrak{E}$ fallen, bleibt die Restklasse von T nach der Gruppe $\mathfrak{E}$ bei der Transformation invariant.

An Hand der Definition der abgeleiteten Matrizen überzeugt man sich leicht, daß T auch bei Unterteilung des Komplexes $\mathfrak{K}$ invariant bleibt; doch folgt das einfacher aus der in der folgenden Nr. anzugebenden Normalform.

6. *Einzigkeit der Invariante* T. Um die Berandungsmatrizen R_k gleichzeitig in eine Normalform überzuführen, benutzen wir zunächst Transformationsmatrizen P_k der folgenden beiden Formen: (1) $V_{\mu\nu}$ $(\mu \neq \nu)$ mit $a_{\mu\nu} = 1$, $a_{\nu\mu} = -1$, $a_{ii} = 1$ $(i \neq \mu, \nu)$, $a_{ik} = 0$ sonst, (2) $Z_{\mu\nu}(b)$ $(\mu \neq \nu)$ mit $a_{\mu\nu} = b$, $a_{ii} = 1$, $a_{ik} = 0$ sonst; beide haben die Determinante 1. Mit ihrer Hilfe kann man in bekannter Weise erreichen [11]), daß die transformierten Berandungsmatrizen in der Hauptdiagonale der rechten oberen r_k-reihigen Untermatrizen von Null verschiedene Elemente besitzen, sonst aber nur aus Nullen bestehen. Da $\alpha_1 > r_0$ ist, kann man dann eine α_1-reihige Diagonalmatrix P_1 der

[11]) Siehe etwa U_2, Satz 6 und anschließende Bemerkungen.

Determinante 1 so bestimmen, daß nach vorderer Multiplikation mit P_1 die Berandungsmatrix R_0 in der Hauptdiagonale mit Einsen und sonst mit Nullen besetzt ist. Da $\alpha_2 > r_1, \ldots, \alpha_{n-1} > r_{n-2}$, kann man nacheinander Diagonalmatrizen der Determinante 1 als Transformationsmatrizen bestimmen derart, daß für $k = 0, \ldots, n-2$ die Berandungsmatrizen R_k in der Hauptdiagonale der rechten oberen r_k-reihigen Teilmatrizen mit Einsen und sonst nur mit Nullen besetzt sind. R_{n-1} ist dann nur in der Hauptdiagonale der rechten r_{n-1}-reihigen Untermatrix mit von Null verschiedenen Elementen besetzt. Ist deren Produkt gleich T_0, so kann man endlich P_n als Diagonalmatrix der Determinante 1 so bestimmen, daß nach vorderer Multiplikation mit P_n die Reihe dieser von Null verschiedenen Elemente lautet: $\mathsf{T}_0, 1, \ldots, 1$. Jetzt erkennt man $\mathsf{T}_0 = \mathsf{T}$ als Torsion der Überdeckung. Zugleich ergibt sich, daß man jedes System von Berandungsmatrizen mit der Torsion T in die somit hergestellte Normalform überführen kann, daß also neben den Bettischen Zahlen der Überdeckung die Torsion T (genauer die Restklasse von T nach $\mathfrak{E}$) die einzige Invariante der Überdeckung ist.

Bei Unterteilung des Komplexes $\mathfrak{K}$, die sich auf die Berandungsmatrizen in der oben beschriebenen Weise auswirkt, ergibt sich die neue Normalform für die Berandungsmatrizen aus der alten fast unmittelbar, nämlich durch einfache Vertauschung gewisser Zeilen und Spalten. Die Torsion bleibt dabei unverändert.

II.

7. *Definition der Linsenräume* [12]). $z_k = x_{2k} + ix_{2k+1}$ $(k = 0, \ldots, n)$ seien $n+1$ komplexe Variable, $\bar{z}_k = x_{2k} - ix_{2k+1}$. Die $(2n+1)$-dimensionale Einheitssphäre $\mathsf{H} = \mathsf{H}_{2n+1}$ wird gegeben durch die Gleichungen

$$\sum_{k=0}^{n} z_k \bar{z}_k = \sum_{i=0}^{2n+1} x_i^2 = 1.$$

m sei eine natürliche Zahl $\geqq 2$, l_k $(k = 0, \ldots, n)$ seien zu m prime ganze rationale Zahlen und $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Durch die Transformation

$$z_k' = \zeta^{l_k^{-1}} z_k \qquad (l_k^{-1} \text{ ganz mit } l_k^{-1} l_k \equiv 1 \bmod m)$$

wird eine Drehung γ von H von der Ordnung m ohne Fixpunkte vermittelt. Identifiziert man diejenigen Punkte von H, die bei γ und der Gruppe $\mathfrak{G}$ der Potenzen von γ in sich übergehen, so ergibt sich eine $(2n+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $L = L(l_0, \ldots, l_n)$, die wir den zum System der l_k mod m gehörigen Linsenraum nennen [13]). Man kann folgende Abänderungen an dem System der l_k vornehmen, ohne den Homöomorphietypus der Mannigfaltigkeit zu ändern: Da die Erzeugende der Gruppe $\mathfrak{G}$ beliebig ist, darf man

(1) die l_k durch ll_k mit festem zu m primem l ersetzen.

Da die Reihenfolge der Variablen $z_0, \ldots, z_k$ gleichgültig ist, darf man

(2) die l_k untereinander permutieren.

---

[12]) de Rham, a. a. O. [6]). Die hier etwas einfachere Einführung der Linsenräume in dieser und der folgenden Nr. stammt ebenfalls im wesentlichen von de Rham; ich entnehme sie mit seiner freundlichen Erlaubnis einer brieflichen Mitteilung von ihm an Herrn Reidemeister.

[13]) Stellt man im dreidimensionalen Fall die Sphäre H_3 durch eine dreidimensionale Vollkugel mit Randzuordnung dar, so erkennt man leicht die Gleichwertigkeit dieser Definition mit der gewöhnlichen (vgl. etwa H. Tietze, Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Monatsh. Math. Phys. **19** (1908), § 20), welche den Linsenräumen ihren Namen gegeben hat.

Achtet man nicht auf die Orientierung, so darf man endlich jede einzelne Variable z_k durch $\bar{z}_k$ ersetzen; das kommt hinaus auf

(3) die Ersetzung von l_k durch $-l_k$.

Während bei (1) und (2) die Orientierung erhalten bleibt, tritt bei Ersetzung eines l_k durch $-l_k$ eine Spiegelung, also eine Umkehrung der Orientierung ein; die Orientierung bleibt sicher erhalten, wenn man

(3a) gleichzeitig zwei von den l_k durch $-l_k$ ersetzt.

Linsenräume, deren zugehörige Systeme l_k mod m durch die Umformungen (1) — (3) auseinander hervorgehen, stimmen metrisch überein, sie sind also sicher homöomorph. Im folgenden wird gezeigt, daß die Bedingungen (1) — (3) für die Homöomorphie auch notwendig sind.

Übrigens sind die Gruppen $\mathfrak{G}$ im wesentlichen die einzigen endlichen zyklischen Gruppen von Bewegungen und Spiegelungen der Sphäre, die Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten sein können. Bei Sphären H_{2n+1} ungerader Dimension folgt das daraus, daß jede unitäre Transformation des Raumes der $z_0, \ldots, z_n$ sich unitär auf die Diagonalform transformieren läßt; da die Transformation von endlicher Ordnung m sein soll, muß sie gerade die Form γ haben, und zwar sind die Exponenten l_k sämtlich zu m prim, da jeder Punkt von H_{2n+1} mit gleichviel anderen Punkten von H_{2n+1} äquivalent sein muß. Bei Sphären H_{2n} gerader Dimension hat jede Bewegung einen Fixpunkt. Die Diametralpunktspiegelung führt zum $2n$-dimensionalen projektiven Raum, der jedoch nicht, wie die Linsenräume, orientierbar ist; andere Spiegelungen kommen nicht in Frage.

8. *Kombinatorisches Schema der Linsenräume.* Zunächst führen wir eine Zellenzerlegung der Sphäre $\mathsf{H} = \mathsf{H}_{2n+1}$ ein. Es sei für $j = 0, \ldots, m-1$ mod m

$$a_j^{2n+1} \text{ definiert durch } \frac{2\pi}{m} j < \arg z_n < \frac{2\pi}{m}(j+1),$$

$$a_j^{2n} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \arg z_n = \frac{2\pi}{m} j.$$

Für den Rand $\mathsf{R}(a_j^{2n+1})$ von a_j^{2n+1} gilt: $\mathsf{R}(a_j^{2n+1}) = a_j^{2n} - a_{j+1}^{2n}$. Die Zellen a_j^{2n} haben sämtlich denselben Rand; er wird gebildet durch die Punkte von H mit $z_n = 0$. Diese Punkte erfüllen die Gleichung $z_0\bar{z}_0 + \cdots + z_{n-1}\bar{z}_{n-1} = 0$, sie bilden also eine $(2n-1)$-dimensionale Sphäre H_{2n-1}. Diese zerlegen wir weiter in die Zellen

$$a_j^{2n-1} \text{ definiert durch } z_n = 0, \ \frac{2\pi}{m} j < \arg z_{n-1} < \frac{2\pi}{m}(j+1),$$

$$a_j^{2n-2} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad z_n = 0, \ \arg z_{n-1} = \frac{2\pi}{m} j.$$

Dann gilt $\mathsf{R}(a_j^{2n}) = a_0^{2n-1} + \cdots + a_{m-1}^{2n-1}$, $\mathsf{R}(a_j^{2n-1}) = a_j^{2n-2} - a_{j+1}^{2n-2}$. Der Rand jeder Zelle a_j^{2n-2} ist ein und dieselbe $(2n-3)$-dimensionale Sphäre H_{2n-3}. Diese zerlegen wir in analoger Weise wie eben H_{2n-1}. Durch Fortsetzung des Verfahrens ergibt sich eine Zelleneinteilung von H in je m Zellen jeder Dimension.

Bei Anwendung der Gruppe $\mathfrak{G}$ vertauschen sich ersichtlich die Zellen jeder Dimension untereinander. Für $k = 0, \ldots, n$ gilt

$$\gamma^{l_k} a_j^{2k+1} = a_{j+1}^{2k+1}, \quad \text{allgemein} \quad \gamma^{j' l_k} a_j^{2k+1} = a_{j+j'}^{2k+1},$$
$$\gamma^{l_k} a_j^{2k} = a_{j+1}^{2k}, \quad \text{,,} \quad \gamma^{j' l_k} a_j^{2k} = a_{j+j'}^{2k}.$$

Identifiziert man also diejenigen Punkte von H, die bei $\mathfrak{G}$ ineinander übergehen, so bleibt

für jede Dimension genau eine Zelle übrig, und als Inzidenzschema der Linsenräume ergibt sich

$$\mathsf{R}(a^{2k+1}) = 0, \quad \mathsf{R}(a^{2k}) = ma^{2k-1} \qquad (k = 0, \ldots, n)$$

(dabei ist $a^{-1} = 0$ zu setzen). Man liest daraus für die Bettischen Zahlen im gewöhnlichen Sinne ab: $p_{2n+1} = 1$, $p_{2n} = \cdots = p_1 = 0$, $p_0 = 1$. An Torsionskoeffizienten treten auf $e_{2n-1} = e_{2n-3} = \cdots = e_1 = m$. m ist also eine Invariante von L. Wegen $p_{2n+1} = 1$ sind die Linsenräume orientierbar.

9. *Homotopiekettenring und Torsion.* Die Sphäre H überlagert gemäß der obigen Konstruktion den Raum L. Da sie selbst keine weitere Überlagerung gestattet, stellt sie die universelle Überlagerung von L dar. L ist Fundamentalbereich für die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von H; $\mathfrak{G}$ ist zugleich die Fundamentalgruppe von L. Die Berandungsrelationen lauten in der Sprache der Homotopiekettenringe

$$\mathsf{R}(a^{2k+1}) = (1 - \gamma^{l_k})\, a^{2k}, \quad \mathsf{R}(a^{2k}) = (1 + \gamma + \cdots + \gamma^{m-1})\, a^{2k-1}.$$

Wir legen hier den Gruppenring von $\mathfrak{G}$ mit beliebigen rationalen Koeffizienten zugrunde. Dieser ist als Restklassenring aller Polynome in γ mit rationalen Koeffizienten nach dem Polynom $\gamma^m - 1$ die direkte Summe der Restklassenringe nach den sämtlichen Teilern von $\gamma^m - 1$, nämlich den Kreisteilungspolynomen für sämtliche Teiler m_0 von m, er ist also die direkte Summe aller m_0-ten Kreiskörper K_{m_0}. Der Homotopiekettenring zerlegt sich demgemäß in die entsprechenden Überdeckungen $\mathfrak{U}_{m_0}$ mit den K_{m_0}. Die Komponente von γ in K_{m_0} ist eine primitive m_0-te Einheitswurzel ζ_{m_0}, die Berandungsrelationen für $\mathfrak{U}_{m_0}$ ergeben sich also aus den oben angegebenen, wenn man γ durch ζ_{m_0} ersetzt. $\mathfrak{U}_1$ ist mit dem gewöhnlichen Kettenring von L mit rationalen Koeffizienten identisch und liefert die oben angegebenen Bettischen Zahlen im gewöhnlichen Sinne. Für die übrigen $\mathfrak{U}_{m_0}$ sind alle Bettischen Zahlen Null; die Torsion T_{m_0} berechnet sich, wenn man beachtet, daß die 0-ten Abgeleiteten und Adjungierten gleich 1 zu setzen sind, zu

$$\mathsf{T}_{m_0} = \prod_{k=0}^{n} (1 - \zeta_{m_0}^{l_k}).$$

Ein Basiswechsel im Homotopiekettenring mit Transformationsmatrizen mit Determinanten $\pm \gamma^d$ (bzw. $+ \gamma^d$) erzeugt einen entsprechenden Basiswechsel in allen $\mathfrak{U}_{m_0}$. Nach I bleibt dabei die Torsion bis auf eine Potenz $\zeta_{m_0}^f$ (mit einem für alle m_0 gleichen Exponenten f) invariant. Für homöomorphe Linsenräume $L(l_0, \ldots, l_n)$ und $L(\bar{l}_0, \ldots, \bar{l}_n)$ gilt also

$$(*) \qquad \prod_{k=0}^{n} (1 - \zeta_{m_0}^{l_k}) = \pm \zeta_{m_0}^{f} \prod_{k=0}^{n} (1 - \zeta_{m_0}^{\bar{l}_k}),$$

$$\prod_{k=0}^{n} (1 - \zeta_{m_0}^{l_k})\,(1 - \zeta_{m_0}^{-l_k}) = \prod_{k=0}^{n} (1 - \zeta_{m_0}^{\bar{l}_k})\,(1 - \zeta_{m_0}^{-\bar{l}_k}),$$

letzteres wegen der konjugiert komplexen Gleichung zu (*). Unsere Behauptung lautet, daß rechts und links bis auf die Reihenfolge dieselben $l_k, -l_k$ vorkommen. Bezeichnet n_ν bzw. $\bar{n}_\nu$ die Anzahl der $l_k \equiv \nu \bmod m$ bzw. $\bar{l}_k \equiv \nu \bmod m$ und setzt man $a_\nu = n_\nu - \bar{n}_\nu$, so bleibt zu zeigen: Wenn für jedes $m_0 \mid m$

$$\prod_{\substack{\nu \bmod m \\ (\nu, m) = 1}} (1 - \zeta_{m_0}^{\nu})^{a_\nu} = 1, \text{ wobei } a_{-\nu} = a_\nu, \ \Sigma a_\nu = 0,$$

so folgt, daß jedes $a_\nu = 0$. Das wird in Nr. 12 bewiesen werden.

10. *Orientierte Linsenräume.* Orientiert man die Mannigfaltigkeit und läßt nur Transformationsmatrizen mit Determinanten $+ \gamma^d$ zu, so gilt in (*) nur das positive

Zeichen. Betrachtet man einen ungeraden Primteiler $m_0 = q$ von m und dividiert durch $(1 - \zeta_q)^{n+1}$, so ergibt sich

$$\prod_{k=0}^{n} l_k \equiv \prod_{k=0}^{n} \bar{l}_k \bmod (1 - \zeta_q), \text{ also mod } q.$$

Setzen wir an dieser Stelle das Ergebnis von Nr. 12 voraus, so folgt, daß die $\bar{l}_k$ aus den l_k durch eine gerade Zahl von Vorzeichenänderungen, d. h. durch eine Reihe von Umformungen (3a) hervorgehen. Hat m nur den Primteiler 2, $m = 2^c$ ($c \geqq 2$, für $c = 1$ wird (3) inhaltslos), so folgt aus (*) für $m = 2$, daß f gerade ist. Für $m = 4$ folgt weiter durch Quadrieren wegen

$$(1 - i^{l_k})^2 = (-1)^{\frac{l_k - 1}{2}} 2i \qquad (l_k \text{ ungerade}),$$

daß $\Sigma l_k \equiv \Sigma \bar{l}_k \bmod 4$, wonach man genau so schließt wie eben. Zwei Linsenräume sind also dann und nur dann unter Berücksichtigung der Orientierung homöomorph, wenn sie durch die Umformungen (1), (2), (3a) auseinander hervorgehen, also dann und nur dann, wenn sie sich auch metrisch unter Beachtung der Orientierung aufeinander abbilden lassen.

Insbesondere kann man danach entscheiden, ob man einen Linsenraum $L = L(l_0, \ldots, l_n)$ auf den entgegengesetzt orientierten $L(-l_0, l_1, \ldots, l_n)$ topologisch abbilden kann, ob L symmetrisch oder asymmetrisch ist. Bei ungeradem n, d. h. bei Dimensionen $2n + 1 \equiv -1 \bmod 4$ ist das ersichtlich stets der Fall, während es bei geradem n stets Räume gibt, bei denen das nicht möglich ist. Im dreidimensionalen Fall ist der Linsenraum $L(l, 1)$ dann und nur dann symmetrisch, wenn $l^2 \equiv -1 \bmod m$.

11. *Der Fall einer Primzahl.* Zunächst sei kurz der Fall betrachtet, daß $m = p$ eine Primzahl ist. Der allgemeine Fall wird jedoch unten unabhängig hiervon behandelt. Außer $\mathfrak{U}_1$ erhält man dann nur eine Überdeckung $\mathfrak{U}_p$ mit dem p-ten Kreiskörper K_p. Unter Benutzung der in K_p gelegenen Einheiten

$$\varepsilon_\nu = \frac{1 - \zeta_p^\nu}{1 - \zeta_p} \frac{1 - \zeta_p^{-\nu}}{1 - \zeta_p^{-1}} \qquad \left(\nu = 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$$

schreibt sich die in Frage stehende Relation wegen der Bedingungen $a_{-\nu} = a_\nu$, $\Sigma a_\nu = 0$ in der Form

$$\prod_{\nu=2}^{\frac{p-1}{2}} \varepsilon_\nu^{a_\nu} = 1 .$$

Die Behauptung lautet, daß dann alle $a_\nu = 0$ sind. Da hier jedes Exponentensystem a_ν wirklich auftritt, bedeutet das die Unabhängigkeit der $\frac{p-3}{2}$ Einheiten ε_ν; die Unterscheidbarkeit der Linsenräume nach dem Werte ihrer Torsion ist also gleichbedeutend mit der Unabhängigkeit der ε_ν. Daß die ε_ν in der Tat unabhängig sind, folgt aus der Kummerschen Formel für die Idealklassenzahl in K_p, in welcher der Regulator der ε_ν als ein Faktor auftritt, der demnach notwendig von Null verschieden ist. Damit ist die Behauptung in diesem Fall bewiesen [14]).

[14]) D. Hilbert, a. a. O. [7]), § 120, Satz 144, Beweis. Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn de Rham hat er inzwischen das Homöomorphieproblem für $(2n + 1)$-dimensionale Linsenräume in dem Falle, daß m eine Primzahl ist, ebenfalls gelöst. Seine Methode ist im Prinzip dieselbe wie die in dieser Nr. verfolgte; auch er benutzt den angegebenen Satz des Hilbertschen Zahlberichtes.

In ganz derselben Weise kann man schließen, wenn m eine Primzahlpotenz ist, indem man die entsprechende Kummersche Klassenzahlformel heranzieht [15]).

12. *Der allgemeine Fall.* Wir beweisen für beliebiges m die Behauptung am Schluß von Nr. 9. Es genügt zu zeigen, daß $\sum_\nu \chi(\nu)a_\nu = 0$ ist für jeden Charakter χ mod m. Ist nämlich ν_0 eine feste prime Restklasse mod m, so folgt durch Multiplikation mit $\chi(\nu_0^{-1})$ und Summation

$$\sum_\chi \chi(\nu_0^{-1}) \sum_\nu \chi(\nu) a_\nu = \sum_\nu a_\nu \sum_\chi \chi(\nu\nu_0^{-1}) = \varphi(m)\, a_{\nu_0} = 0$$

auf Grund der Charakterrelationen, also $a_{\nu_0} = 0$ für jedes ν_0.

Für den Hauptcharakter steht die Behauptung $\Sigma\chi(\nu)a_\nu = \Sigma a_\nu = 0$ in der Voraussetzung. Für alle χ mit $\chi(-1) = -1$ folgt sie aus $a_{-\nu} = a_\nu$. Sei also $\chi(-1) = +1$ und χ nicht der Hauptcharakter.

χ werde als eigentlicher Charakter mod m vom Führer m_0 ($m_0 \mid m$) betrachtet. Ist n eine feste prime Restklasse mod m_0 und ist $\Sigma a_\nu = b_n$, wenn die Summe über alle diejenigen Restklassen ν mod m erstreckt wird, für die $\nu \equiv n \bmod m_0$ ist, so gilt wieder $b_{-n} = b_n$, $\Sigma b_n = 0$, wenn n alle primen Restklassen mod m_0 durchläuft. Es ist $\sum_\nu \chi(\nu)a_\nu = \sum_n \chi(n)b_n$, es genügt also, den letzten Ausdruck als Null nachzuweisen. Der auf m_0 bezügliche Teil der Voraussetzung heißt

$$\prod_{\substack{n \bmod m_0 \\ (n, m_0)=1}} (1-\zeta_{m_0}^n)^{b_n} = 1, \qquad \prod_{\substack{n \bmod m_0 \\ (n, m_0)=1}} (1-\zeta_{m_0}^{nl})^{b_n} = 1 \qquad ((l, m_0) = 1).$$

Das Letztere folgt durch Konjugiertenbildung. Daher

$$\sum_n b_n \lg|1-\zeta_{m_0}^{nl}| = 0,$$

$$\sum_{l \bmod m_0} \chi(l) \sum_n b_n \lg|1-\zeta_{m_0}^{nl}| = \sum_n b_n \sum_l \chi(l) \lg|1-\zeta_{m_0}^{nl}| = 0,$$

und wenn nl durch l ersetzt wird,

$$\Big(\sum_n \bar\chi(n) b_n\Big)\Big(\sum_l \chi(l) \lg|1-\zeta_{m_0}^{l}|\Big) = 0.$$

Es genügt also zu zeigen, daß der zweite Faktor nicht Null ist, wenn $\chi(-1) = +1$ und χ nicht der Hauptcharakter ist.

Für jeden eigentlichen vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter χ vom Führer m_0 gilt bekanntlich für die Gaußschen Summen

$$(\alpha) \qquad G(\chi) = \sum_{l \bmod m_0} \chi(l)\zeta_{m_0}^l \neq 0, \qquad (\beta) \quad \sum_{l \bmod m_0} \chi(l)\zeta_{m_0}^{nl} = 0, \text{ wenn } (n, m_0) > 1.$$

Wenn $(n, m_0) = 1$, so wird

$$G(\chi) = \sum_{l \bmod m_0} \chi(nl)\zeta_{m_0}^{nl} = \chi(n) \sum_l \chi(l)\zeta_{m_0}^{nl},$$

$$\chi(n) = \frac{1}{G(\bar\chi)} \sum_l \bar\chi(l)\zeta_{m_0}^{nl}.$$

---

[15]) Wenn m mehr als eine Primzahl enthält, so bestehen zwischen den $\varphi(m)$ Einheiten

$$\eta_\nu = \eta_{-\nu} = (1-\zeta_m^\nu)(1-\zeta_m^{-\nu}), \qquad (\nu, m) = 1,$$

außer der Produktbeziehung $\Pi\eta_\nu = 1$ im allgemeinen noch andere Abhängigkeiten. Deshalb kann man in diesem Fall nicht genau so schließen wie oben. Herrn E. Hecke verdanke ich das folgende Beispiel für eine Abhängigkeit der genannten Art. $p \neq q$ seien Primzahlen, $q \equiv 1 \bmod p$, $m = pq$; dann gilt für $\nu = 1, \ldots, p-1$

$$\prod_{\mu=1}^{q-1} \eta_{\mu p+\nu q} = \prod_{\mu=1}^{q-1} (1-\zeta_q^\mu \zeta_p^\nu)(1-\zeta_q^{-\mu}\zeta_p^{-\nu}) = \frac{1-\zeta_p^{\nu q}}{1-\zeta_p^\nu} \frac{1-\zeta_p^{-\nu q}}{1-\zeta_p^{-\nu}} = 1.$$

Auch die Darstellung von $L(1,\chi)$ am Schluß der folgenden Nr. geht auf E. Hecke zurück. Die Schlußweise in Nr. 11 führt zu einem Beweis dafür, daß die sämtlichen Einheiten der Form ε_ν, η_ν für alle $m_0 \mid m$ ein volles Einheitensystem in K_m bilden; umgekehrt reicht diese Tatsache zur Unterscheidung der Linsenräume aus.

Wegen (β) gilt das auch für $(n, m_0) > 1$. Führt man das in die L-Reihen ein, so folgt wegen $\chi(-1) = +1$

$$\begin{aligned} L(1, \chi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} \\ &= \frac{1}{G(\bar{\chi})} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l \bmod m_0} \frac{\bar{\chi}(l)\, \zeta_{m_0}^{nl}}{n} \\ &= \frac{1}{G(\bar{\chi})} \sum_{l} \bar{\chi}(l) \sum_{n} \frac{\zeta_{m_0}^{nl}}{n} = \frac{1}{G(\bar{\chi})} \sum_{l} \bar{\chi}(l) \sum_{n} \frac{\zeta_{m_0}^{-nl}}{n} \\ &= \frac{1}{G(\bar{\chi})} \sum_{l} \bar{\chi}(l)\, \frac{1}{2} \left(\sum_{n} \frac{\zeta_{m_0}^{nl}}{n} + \sum_{n} \frac{\zeta_{m_0}^{-nl}}{n} \right) \\ &= \frac{1}{G(\bar{\chi})} \sum_{l} \bar{\chi}(l) \lg |1 - \zeta_{m_0}^{l}|. \end{aligned}$$

Da $L(1, \chi) \neq 0$, ist damit die Behauptung bewiesen.

Eingegangen 21. Juni 1935.

Vor kurzem erschien:

Grundzüge und Aufgaben der Differential- und Integralrechnung

nebst den Resultaten

Von Dr. H. DOLP.

Neu bearbeitet von Dr. EUGEN NETTO.

18. Auflage. Oktav. 214 Seiten. RM 1.95

Das Bändchen stellt eine elementare Aufgabensammlung zur Differential- und Integralrechnung mit eingefügten Erläuterungen dar. Der erste Abschnitt, Differentialrechnung für Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen, bringt die Differentiation der elementaren Funktionen, einschließlich implizite Funktionen, die Ermittelung der Werte unbestimmter Formen, Maxima und Minima, Taylorsche Reihe. Der zweite Abschnitt, Integralrechnung, führt das Integral als unbestimmtes ein, entwickelt die Integrationsformeln im Bereiche der elementaren Funktionen und geht dann kurz auf das bestimmte Integral ein. Schließlich werden noch verhältnißmäßig ausführlich geometrische Anwendungen der Infinitesimalrechnung gebracht: Tangentenbestimmung, singuläre Punkte, Krümmung; Quadratur, Rektifikation, Kubatur.

Alfred Töpelmann Verlag, Berlin W 10